Б. Куммер

Игры на графах

Б. Куммер

Игры на графах

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Bernd Kummer

Spiele auf Graphen

VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften
Berlin 1979

Б. Куммер

Игры на графах

Перевод с немецкого
С. Л. Печерского
под редакцией
Н. Н. Воробьева

Москва
«Мир»
1982

УДК 519.9

Куммер Б.

Игры на графах: Пер. с нем.—М.: Мир, 1982.—112 с., ил.

Книга ученого из ГДР, содержащая изложение теории одного из классов игр, в которых множества позиций с допустимыми в них ходами описываются ориентированными графами. Приведенные в книге результаты, в основном принадлежащие автору, превращают набор отдельных утверждений о таких играх в систематическую теорию.

Для математиков различных специальностей (в том числе прикладных), аспирантов и студентов университетов.

Редакция литературы по математическим наукам

К $\frac{1502000000\text{-}022}{041(01)\text{-}82}$ 22-82, ч. 1

© VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1979

© Перевод на русский язык, «Мир», 1982

Бернд Куммер

ИГРЫ НА ГРАФАХ

Ст. научный редактор Г. М. Ильичева. Мл. научный редактор Т. А. Денисова
Художник Н. Н. Дронова. Художественный редактор В. И. Шаповалов.
Технический редактор Е. В. Ящук. Корректор Н. Н. Яковлева

ИБ № 2951

Сдано в набор 23.11.81. Подписано к печати 10.09.82. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага типографская № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 3,50 бум. л. Усл. печ. л. 7. Усл. кр.-отт. 7,23. Уч.-изд. л. 5,53. Изд. № 1/1480. Тираж 6000 экз. Заказ № 12. Цена 70 коп.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР». 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., 2.

Ленинградская типография № 2 головное предприятие ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29

Предисловие редактора перевода

Предлагаемая вниманию советского читателя монография Б. Куммера посвящена теории игр на графах, однако в ней затрагиваются отнюдь не все разделы этой теории. Более того, книга убеждает читателя именно в том, что теория игр на графах имеет весьма широкие перспективы развития, зародыши которого достаточно густо рассеяны в уже разработанных ее разделах. Одним из таких зародышей оказался вопрос о представлении функции Гранди для сумм игр типа Ним через функции Гранди для игр-слагаемых. Еще около десяти лет тому назад Б. Куммер получил, а в 1975 г. опубликовал казавшийся тогда неожиданным, ныне же представляющийся естественным и принципиальным результат о невозможности такого общего представления даже для сравнительно узкого класса локально ограниченных игр. Дальнейшая разработка этих вопросов и распространение относящихся к функции Гранди и ее обобщениям результатов на более широкие классы игр — сначала терминальных антагонистических, а затем общих терминальных бескоалиционных — и определила содержание данной книги.

Основным используемым в книге математическим аппаратом является теория множеств, точнее те ее приемы, которые группируются вокруг аксиомы выбора и метода трансфинитной индукции. Поэтому можно предположить, что следующий шаг в этом направлении сомкнет результаты Б. Куммера с результатами Я. Мыцельского и Г. Штейнгауза [1]. Но это уже означает переход к использованию аксиоматической теории множеств и построение более общих и глубоких теорий. Напротив, как это ни покажется парадоксальным, методы теории игр, равно как и теории графов, в книге не применяются: нужные методы теории игр автор создает (или воспроизводит) по ходу дела, а из теории графов необходимыми оказываются лишь основные понятия (до функции Гранди включительно; впрочем, уже сама идея функции Гранди носит несколько теоретико-игровой оттенок). Таким образом, чтение книги не предполагает у читателя какой-либо особой математической подготовки, тем более, что все требуемые сведения по теории множеств содержатся в авторском приложении к книге.

Б. Куммер, математик из ГДР, в свое время проходил в Ленинграде научную стажировку, заполненную интенсивными исследованиями по теории игр на графах. Поэтому его книгу можно рассматривать как один из результатов сотрудничества ученых наших стран.

Авторская библиография не претендует на полноту и содержит лишь те публикации, которые автор счел необходимым упомянуть в тексте книги; в связи с этим и редактором перевода добавлено незначительное число названий.

Н. Н. Воробьев

Предисловие

Эта книга предназначена для читателей, интересующихся теорией игр и знакомых с основными понятиями теории множеств и математическими методами рассуждений. Предметом исследования является один частный класс стратегических игр с полной информацией, которые зачастую называются — с теоретико-игровой точки зрения не вполне точно — «играми на графах». Наиболее известными среди этих игр являются так называемые игры Ним.

Книга преследует две цели. Во-первых, — и это является главным — для рассматриваемых игр исследуются различные понятия решения и в первую очередь ситуации равновесия. Во-вторых, в ней читателю предоставляется возможность на примере частных классов игр познакомиться с некоторыми постановками вопросов теории игр в целом. За исключением решения ряда конкретных игр результаты носят теоретический характер и отличаются от относящихся к этой же проблематике классических результатов главным образом тем, что в рассматриваемых играх допускается возможность появления партий бесконечной длины, а в центре внимания, помимо вопросов существования решений, стоят также вопросы, связанные с изучением свойств различных решений.

В ряде существенных мест изложение соприкасается с рассуждениями, проводимыми в книге Бержа [1], при этом добавлены некоторые новые аспекты. Представленные в книге результаты частично были получены в моей диссертации А [1] [1]) — здесь мне представляется удобный случай высказать мою сердечную благодарность профессору Н. Н. Воробьеву и доктору К. Ломмачу за проявленное внимание к моей работе, — а частично являются результатами более поздних исследований, интерес к которым был вызван также работой Сколе [1].

Далее я благодарен А. Берендт за подготовку рукописи и дипломированному математику Г. Рейхер за постоянную

[1]) Диссертация А примерно соответствует кандидатской диссертации в нашей стране. — *Прим. ред.*

доброжелательную поддержку со стороны издательства, а также типографии за тщательный набор.

В заключение мне хотелось бы подчеркнуть, что я буду всегда признателен за критические замечания в адрес этой книги.

Бернд Куммер

Берлин, лето 1979

Введение

С момента выхода в свет в 1944 г. фундаментальной монографии Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна «Теория игр и экономическое поведение» [1] началось бурное развитие теории игр как математической дисциплины. С одной стороны, возросло число исследуемых математических моделей и соответствующих понятий решений, а с другой — удалось более основательно исследовать многочисленные классы игр, обнаружить многие вносящие ясность теоретические высказывания и расширить область приложения теории. Поэтому нет ничего удивительного в том, что в аннотированном указателе «Теория игр» (под ред. Н. Н. Воробьева, Ленинград, Наука, 1976) только до конца 1968 г. зафиксировано 2255 работ [1]), относящихся к теоретическим проблемам и проблемам приложения этой молодой дисциплины.

Если пытаться найти в литературе точное определение «игры на графах», то придется отказаться от надежды на успех. Хотя это понятие встречается достаточно часто и даже фигурирует в рубрикаторе упомянутого выше библиографического указателя, оно тем не менее характеризует скорее целое семейство весьма различных игр, нежели один четко очерченный класс игр. В качестве наиболее общих игр на графах можно было бы рассматривать изучавшиеся Бержем [1] игры с полной информацией. Такая игра описывается произвольным ориентированным графом, каждая вершина которого p относится к одному из n классов и «оценивается» вещественным n-мерным вектором $(H_1(p), H_2(p), \ldots, H_n(p))$.

Механизм, согласно которому протекает реализация такой игры (обычно в этом случае говорят о *партии* игры), легко описать: от вершины к вершине графа по его дугам передвигается фишка, причем каждый раз ее передвигает тот из n игроков, в классе которого оказывается фишка. Если при этом в партии последовательно проходятся вершины $p^1, p^2, \ldots$ (здесь еще должна быть задана «начальная вершина» p^1), то игрок i получает выигрыш $H_i^+ = \sup\limits_{k=1, 2, \ldots} H_i(p^k)$, если он является «активным» игроком, и соответственно $H_i^- = \inf\limits_{k=1, 2, \ldots} H_i(p^k)$, если i — «пассивный» игрок [2]).

---

[1]) Во втором томе этого аннотированного указателя (Ленинград, Наука, 1980) зафиксировано еще 2611 работ, опубликованных в 1969—1974 гг. — *Прим. ред.*

[2]) Точнее, игроки делятся на «активных», получающих выигрыш H_i^+, и «пассивных», получающих выигрыш H_i^-. — *Прим. ред.*

Существенно более простыми являются так называемые игры типа Ним: фишка передвигается вдоль дуг некоторого графа поочередно двумя игроками; при этом проигрывает тот, кто не имеет больше хода (т. е. достигнута «концевая вершина» графа).

Исследуемые нами игры совпадают с описанными выше, за исключением правила задания выигрышей. Выигрыш объявляется (он может быть также и отрицательным) тогда и только тогда, когда достигается концевая вершина p графа. В этом случае игрок i получает выигрыш $H_i(p)$. Формально (в соответствии с терминологией Бержа) речь здесь идет об играх с полной информацией и терминальным выигрышем, и в дальнейшем мы будем называть эти игры *терминальными*.

В иерархической системе моделей, изучавшихся до сих пор в рамках теории игр, терминальные игры (если считать все партии конечными) прежде всего относятся к широкому классу стратегических игр, а в его пределах — к позиционным играм дискретного типа.

Стратегию игрока мы понимаем как функцию, которая каждой вершине из отвечающего этому игроку класса приписывает некоторый допустимый «ход» (соответствующий той или иной выходящей из вершины дуге графа). Позиции представляют собой вершины графа; последовательность следующих друг за другом позиций (которая иногда также называется партией) является дискретной. Поскольку мы предполагаем, что все игроки могут все время следить за движением фишки, т. е. в каждый момент партии знают как достигнутую позицию, так и все ранее пройденные, мы имеем дело с полной информацией. Заметим, что игра с неполной информацией описывается при помощи более сложных условий: игрок, чья очередь ходить, знает только, что фишка находится в некотором определенном подмножестве всех «его» вершин. Из каждой принадлежащей этому подмножеству вершины выходит одинаковое число дуг, скажем t. Игрок должен только выбрать одну из альтернатив $1, 2, \ldots, t$, после чего фишка передвинется вдоль соответствующей дуги. Вся трудность состоит здесь в том, что выбор той или иной альтернативы может оказаться хорошим, если фишка находится в одной из вершин этого подмножества, и плохим, если фишка находится в другой вершине. Типичными представителями таких игр являются игры в карты; вместе с тем и все игры в нормальной форме, например матричные игры, допускают такую интерпретацию.

Мы затронули здесь вопрос об информированности игроков для того, чтобы подчеркнуть существенность требования полной информации. Формально она проявляется в предположении, что подмножества (они обычно называются информационными множествами) являются одноэлементными, а содержательно — в точном знании того состояния, в котором в данный момент находится партия. Не последнюю роль играет здесь и то, что полнота информации оказывает решающее влияние на *разрешимость* игры.

В то время как в играх с полной информацией ситуации равновесия в чистых стратегиях существуют даже при очень слабых предположениях, в простейших играх с неполной информацией их может уже не быть, и поэтому в таких играх имеет смысл переходить к так называемым «смешанным» стратегиям. Основополагающие результаты, касающиеся игр с неполной информацией, можно найти в работах Куна [1] и Н. Н. Воробьева [2, 4] [1]), а также в работах, указанных в списке литературы и снабженных пометками НИ или ТИ.

Не вдаваясь подробно в историю развития теории игр — мы отсылаем в этой связи к прекрасному обзору Н. Н. Воробьева [5], — отметим лишь, что математическое исследование игр с полной информацией уже в начале века (Цермело [1], 1912 г.; Кёниг [1], 1927 г.; Кальмар [1], 1928/29 г., Гранди [1], 1939 г.) подготовило основные идеи и важные результаты для заложенной впоследствии Дж. фон Нейманом и О. Моргенштерном теории игр. Особую роль сыграла работа Цермело [1], ознаменовавшая начало применения к изучению игр с полной информацией теоретико-множественного подхода. Это дало возможность доказать с помощью индукции по длине наиболее длинной партии существование (чистых) оптимальных стратегий (соответственно существование ситуаций равновесия в неантагонистическом случае) в играх с партиями ограниченной длины. Эту же идею использовал в 1957 г. Берж [1] для доказательства существования глобальных ситуаций равновесия в играх с полной информацией и конечным множеством градаций выигрышей (дискретные выигрыши)[2]) в предположении конечности всех партий. Его доказательство отличается от классического только тем, что полная индукция заменяется в нем трансфинитной. Поскольку индуктивное доказательство является также и конструктивным, нахождение ситуаций равновесия представляется не слишком затруднительным, если не считать технических сложностей, которые, однако, как в случае шахмат, могут оказаться существенными. Таким образом,

---

[1]) В данных работах речь идет лишь о некоторых вопросах, связанных с этими играми. — *Прим. ред.*

[2]) Здесь имеется в виду, что множество всех векторов выигрышей вида $H(p)$, где p — окончательная позиция, конечно. — *Прим. перев.*

можно считать, что в перечисленных выше работах выяснены основные вопросы теории игр для наиболее важных из рассматриваемых здесь терминальных игр. В чем же состоит предмет и цель наших исследований?

С одной стороны, мы покажем, что даже в кажущемся благополучным семействе конечных терминальных игр с партиями ограниченной длины остаются открытыми некоторые существенные вопросы, касающиеся понятия решения. С другой стороны, мы проведем тщательный анализ игр с бесконечными партиями, для которых выигрыш не определен априори. Эти исследования группируются вокруг центрального в бескоалиционных играх понятия решения — ситуации равновесия. При этом в соответствии с терминологией Бержа [1] мы различаем локальные и глобальные ситуации равновесия в зависимости от того, удовлетворяет ли рассматриваемая ситуация условию равновесности для некоторой фиксированной начальной позиции или же для всех позиций. Мы различаем также сильные и слабые ситуации равновесия: первые из них порождают только конечные партии, тогда как при вторых возможны и бесконечные партии.

Невзирая на это различие, вводимое по техническим соображениям, ситуация равновесия, которая, как известно, представляет собой решение в бескоалиционных стратегических играх, не лишена определенного коварства. Поэтому мы остановимся на понятии ситуации равновесия несколько подробнее. Прежде всего ситуация равновесия является ситуацией, т. е. некоторым набором $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ возможных стратегий n игроков; при этом игрок i получает выигрыш $H_i(s_1, \ldots, s_n)$. На первых порах мы можем отвлечься от вида зависимости выигрыша от сыгранной партии. Условие равновесности утверждает только, что ни один из игроков не заинтересован в том, чтобы в одиночку отклониться от ситуации s. Иначе говоря, для всех i и для любой стратегии t_i игрока i должно выполняться неравенство

$$H_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, t_i, s_{i+1}, \ldots, s_n) \leqq H_i(s_1, s_2, \ldots, s_n).$$

Это требование представляется разумным, так как кооперирование игроков, а тем самым и согласование их интересов запрещены (в противном случае имело бы смысл сравнивать $H_i(s)$ вообще с выигрышами в произвольных ситуациях t). Те коварные черты ситуаций равновесия, о которых говорилось выше, являются следствием свойств множества всех ситуаций равновесия. Оно, например, может содержать различные элементы, в которых выигрыши одного и того же игрока не обязаны быть одинаковыми (в этом случае можно говорить о неравноценности ситуаций равновесия). Кроме того, если из двух ситуаций равновесия s и t составить новую ситуацию, например $(t_1, s_2, \ldots, s_n)$, то она может уже не быть равновесной, что означает отсутствие «прямоугольности» множества всех ситуаций равновесия. Поскольку, однако, игры с полной информацией, и в частности терминальные игры, относятся к «наиболее приятным» стратегическим играм (хотя бы в смысле существования чистых ситуаций равновесия), представляется вполне оправданной надежда на то, что здесь равноценность и прямоугольность имеют место, и вследствие этого можно говорить о «хороших» и «плохих» ходах: если все игроки ходят «хорошо», то получается ситуация равновесия, и наоборот. Мы увидим тем не менее, что в этом вопросе необходима осмотрительность (даже в пределах класса всех терминальных игр с конечным множеством позиций и только конечными партиями).

Другая проблема типична именно для позиционных игр и связана с тем, в каком отношении находятся локальные и глобальные ситуации равновесия. Очевидно, что выигрыш каждого игрока в терминальной игре зависит не только от создавшейся ситуации, но и от соответствующей начальной позиции. Поэтому «разумная» для одной конкретной начальной позиции p ситуация может не быть «разумной» (в том же смысле) для всех начальных позиций. Конечно, напрашиваются предположения, что в том случае, когда для каждой (начальной) позиции существует локальная ситуация равновесия, существует и глобальная, а также что локальная ситуация равновесия не для каждой позиции может требовать ходы, не принадлежащие никакой глобальной ситуации равновесия (если таковая существует). Оба этих предположения, однако, оказываются неверными уже для очень простых игр: первое для

антагонистических терминальных игр с бесконечными множествами позиций и (возможными) бесконечными партиями (если рассматривать сильные ситуации равновесия),

терминальных игр трех лиц с конечным множеством позиций и бесконечными партиями (здесь для каждой позиции может существовать сильная ситуация равновесия независимо от существования глобальной слабой);

второе для

неантагонистических терминальных игр с конечным числом позиций и только конечными партиями (см. также список примеров).

Третий круг вопросов, к которому мы обратимся, касается игр типа Ним и классического вопроса о ситуациях равновесия в некоторых композициях (суммы и произведение игр типа Ним). Здесь речь идет в первую очередь о том, чтобы очертить возможности и границы использования функций Гранди, полезных при изучении сумм игр, сконструировать удобную «функцию игры» для решения произвольной игры-произведения, а также проиллюстрировать различные вводимые понятия решения на примерах простейших терминальных игр. В силу того что для этой цели нам придется опираться на известные, но подчас весьма специальные результаты, мы уделим играм типа Ним сравнительно много внимания.

Основополагающая идея наших исследований состоит в том, чтобы рассматривать на множестве всех позиций некоторые функции, находящиеся в тесной связи с решениями. Подобный метод можно встретить в динамическом программировании, где решения описываются функциональными уравнениями Беллмана. Изучаемые здесь функции («функции значения» для антагонистической игры и «функции решения» для неантагонистической игры) в иерархической системе понятий решений располагаются между глобальными сильными и глобальными слабыми ситуациями равновесия и позволяют делать выводы об определенных свойствах глобальных решений.

Применительно к высказываниям об играх с конечной, но неограниченной длиной партий в качестве решающего вспомогательного средства используется трансфинитная индукция. Чтобы менее искушенному читателю было легче понять, о чем идет речь, в приложении приведены без доказательства определения и теоремы, необходимые для формулировки принципа индукции. Это приложение имеет законченный характер, но ни в коей мере не может ни сократить, ни заменить изучение соответствующей части проблематики трансфинитной теории множеств.

Собственно теоретико-игровая часть настоящей книги разбита на четыре главы. В первой содержатся важнейшие определения и формальные соглашения, а также — и это оказывается особенно полезным — вводится принадлежащее Бержу понятие порядка графа.

Определения, приведенные в этой главе, используются во всем дальнейшем изложении, а гл. 2—4 понятны независимо одна от другой. В гл. 2 мы исследуем с уже упомянутых точек зрения игры типа Ним и их композиции. Мы покажем, что для решения игр порядка p $(p > 1)$ функция Гранди, вообще говоря, не приспособлена. Для случая $p = 1$ (игра-сумма) мы продемонстрируем полезность этой функции даже в тех случаях, когда она принимает трансфинитные значения (при этом необходимо решить лишь техническую задачу, а именно «двойственное представление» порядковых чисел).

Наконец, мы продемонстрируем плодотворность восходящей к Г. П. Буцану и Л. П. Варваку [1] идеи использования «функции игры» для решения произведений произвольных игр типа Ним.

Антагонистическим терминальным играм посвящена гл. 3. Если все партии конечны, то исследования приводят к ожидаемым и известным результатам, касающимся значений антагонистических игр (ср. также Берж [1, 3, 4] и Деноф-ский [1], где эти результаты подробно обсуждаются). Из существования функций значения для произвольной антагонистической игры мы выведем существование глобальных слабых ситуаций равновесия в случае дискретных выигрышей, займемся зависимостью между локальной и глобальной (сильной) разрешимостью, а также исследуем два различных вида оптимальных стратегий (h^+- и h^--оптимальные стратегии), которые соответствуют предположению о том, что основной целью игрока 1 является достижение бесконечной или соответственно конечной партии.

Для изучения общих терминальных игр в гл. 4 представляется разумным рассмотрение адекватного понятию функции значения понятия ф у н к ц и и р е ш е н и я. В том случае, когда возможны только конечные партии, она позволяет дать удобную характеристику глобальных ситуаций равновесия и, в частности, сформулировать результаты о равноценности и прямоугольности. Если же допустимы партии бесконечной длины, то функция решения может и не существовать и, таким образом, в противоположность антагонистическому случаю пропадает еще один удобный инструмент, с помощью которого можно полностью выяснять интересные с точки зрения теории игр, но по существу комбинаторные вопросы. Основными, быть может, результатами этой главы являются уже упоминавшиеся ранее утверждения негативного характера: отсутствие глобальных слабых ситуаций равновесия, несмотря на существование локальных сильных ситуаций равновесия для любой позиции, «противоречие» между локальными и глобальными ситуациями равновесия, существование глобальных слабых ситуаций равновесия при отсутствии функции решения и т. д. В соответствующих примерах множество позиций всегда конечно.

Следуя примеру Оуэна [1], в конце каждой главы мы приводим задачи. По трудности эти задачи различны, поскольку они служат, с одной стороны, просто для закрепления введенных понятий, а с другой — для завершения проведенных исследований.

В заключение отметим, что нумерация формул и утверждений проводится отдельно в каждом параграфе, обозначенном двумя цифрами, причем теоремы, определения и т. п. снабжаются также номером соответствующего параграфа; различные требования, относящиеся к одному определению, сопровождаются буквой D. Для экономии места мы часто используем логические кванторы в качестве стенографических знаков. Мы перечислим здесь как эти кванторы, так и некоторые обозначения, неоднозначно трактуемые в литературе.

1. *Логические символы*

$\forall$	для любого
$\exists$	существует
$\wedge$	и
$\vee$	или
$a \Rightarrow b$	импликация (из a следует b)

2. *Множества*

$\lvert A \rvert$	мощность множества A
$A \subset B$	A является подмножеством B, равенство допустимо
2^A	множество всех подмножеств множества A
$f: A \to B$	f есть (однозначное) отображение множества A в множество B
$\varnothing$	пустое множество

3. *Фиксированные обозначения*

P	множество позиций игры
$\gamma: P \to 2^P$	динамика игры (за исключением гл. 2)
I	множество игроков (в § 2.3 функция игры)
h_i^-, h_i^+, H_i	функции выигрыша

I

Терминальные игры; понятия и обозначения

Из большого числа исследуемых в теории игр моделей позиционные игры выделяются далеко идущей конкретизацией понятий «стратегии» и «функции выигрыша». В то время как в общем случае стратегия рассматривается всего лишь как элемент некоторого множества, лишенный какой-либо внутренней структуры, а выигрыш каждого игрока определяется на декартовом произведении всех множеств стратегий, позиционные игры менее абстрактны. Результатом выбора стратегий игроками является определенная последовательность (или «партия») в некотором «множестве позиций». Выигрыш каждого игрока является функцией этой последовательности. Правила, определяющие партию по заданным стратегиям, и зависимость выигрышей от партии дают возможность классифицировать позиционные игры.

Так, например, можно прийти к классу дифференциальных игр, если предположить, что стратегиями игроков являются «управляющие функции», а партия возникает как решение некоторой системы дифференциальных уравнений, в которую входят эти функции. Если, напротив, исходить из того, что стратегии определяют в множестве позиций последовательность «ходов» (т. е. дискретных переходов от одной позиции к другой), то это приводит к классическому понятию позиционной игры.

Мы придерживаемся исключительно этого второго представления и при этом рассматриваем только игры с «полной информацией»; это означает, во-первых, что «случайные ходы» (типа, например, тасования карт) отсутствуют, а во-вторых, что каждый игрок может без ограничений следить за возникающими друг за другом в партии позициями[1]). Если партия конечна, то выигрыш каждого игрока должен зависеть только от последней, окончательной позиции (терминальный выигрыш); если же партия бесконечна, то выигрыш априори не определен.

---

[1]) В принятой на русском языке терминологии полная информация характеризуется лишь в т о р ы м из двух условий. Игры, удовлетворяющие п е р в о м у из условий, называются д е т е р м и н и р о в а н н ы м и. — *Прим. перев.*

В силу неопределенности выигрыша в бесконечном случае некоторые партии не поддаются сравнению. Поэтому мы будем вынуждены соответствующим образом модифицировать понятия решений и исходить из двух принципиально различных точек зрения: в связи с *сильными* ситуациями равновесия мы будем требовать, чтобы все интересующие нас партии были конечными; в определении же *слабых* ситуаций равновесия мы будем допускать бесконечные партии, поскольку им можно искусственно приписывать некоторые «разумные» выигрыши.

Как показывает контрпример Гейла и Стюарта [1], даже в антагонистической игре с полной информацией (и конечным числом градаций выигрышей[1])), в которой каждой бесконечной партии выигрыши приписаны произвольно, (чистые) оптимальные стратегии могут не существовать. Поэтому небезынтересен следующий вопрос: можно ли для каждой данной игры с полной информацией так приписывать выигрыши бесконечным партиям, чтобы обеспечить разрешимость этой игры?

Прежде чем подойти в следующих главах к частичному ответу на этот вопрос и заняться свойствами различных решений, приведем необходимые определения.

§ 1.1. Определение терминальной игры

Терминальная игра $\Gamma = (P, \gamma, H, n)$ с n игроками $1, 2, \ldots, n$ задается следующими характеристиками:

непустое множество P;

разбиение множества P на $n+1$ непустых подмножеств $P_0, P_1, \ldots, P_n$;

отображение γ: $P \to 2^P$, которое каждому элементу $p \in P$ ставит в соответствие такое $\gamma p \subset P$, что $\gamma p = \varnothing \Longleftrightarrow p \in P_0$;

отображение H: $P_0 \to R^n$, которое каждому элементу p из P_0 ставит в соответствие вектор $H(p) = (H_1(p), \ldots, H_n(p)) \in R^n$.

Для отдельных компонент игры Γ мы будем применять следующие обозначения:

P — множество позиций;
P_0 — множество окончательных позиций;
γ — динамика игры;
i — игрок i, $i = 1, 2, \ldots, n$;
H — функция выигрыша;

---

[1]) Достаточно уже, чтобы функция выигрышей принимала только два значения: нуль и единица. — *Прим. ред.*

H_i — функция выигрыша игрока i;

P_i — множество позиций, в которых очередь хода принадлежит игроку i (множество очередности игрока i).

Множество игроков всегда обозначается через $I = \{1, \ldots, n\}$.

Для того чтобы можно было разыграть партию игры Г, должна быть прежде всего задана некоторая начальная позиция $p \in P$. Если $p \in P_i$ $(i \in I)$, то «ходит» игрок i, т. е. он выбирает позицию $p' \in \gamma p$. После этого наступает очередь хода того игрока j, в множестве очередности P_j которого оказывается позиция p'. Партия заканчивается тогда, когда таким способом достигается позиция $p_0 \in P_0$; при этом каждый игрок i получает выигрыш $H_i(p_0)$.

Мы предполагаем, что игроки знают динамику игры γ и выигрыши всех игроков в каждой окончательной позиции; они имеют также информацию о позиции, в которой находится партия в каждый момент игры. Множество всех позиций может быть бесконечным.

Если $p \in P_0$, то рассмотренная выше начальная позиция является одновременно и окончательной, и ходы вообще не делаются. С другой стороны, нет никаких гарантий, что в партии будет достигнута окончательная позиция. Таким образом, в общем случае бесконечные партии возможны и допустимы.

§ 1.2. Примеры

Пример 1.2.1. *Игра Фан-Тан.* Пусть на столе стоят несколько, скажем m, ваз с фруктами. Два игрока поочередно берут каждый раз из одной и только одной вазы столько фруктов, сколько они хотят, но не менее одного. Выигрывает тот игрок, который опустошает последнюю вазу.

Каждая позиция в этой игре определяется информацией, состоящей в описании количества фруктов в каждой вазе и очередности хода. Если, например, i — номер игрока, а x_k — число фруктов в k-й вазе, то P имеет вид

$$P = \{((x_1, \ldots, x_m), i) \mid x_k \text{ — целое неотрицательное, } i \in \{1, 2\},\ k = 1, \ldots, m\}.$$

Если далее положить $x = (x_1, \ldots, x_m)$, то будет

$$P_0 = \{((0, \ldots, 0), i) \mid i \in \{1, 2\}\},$$

$$P_i = \{(x, i) \mid x \neq (0, \ldots, 0)\}$$

и

$$\gamma(x, i) = \bigcup_{k=1}^{m} \{(y, j) \mid y_k < x_k, \quad y_l = x_l \quad \forall l \neq k\},$$

где $j \neq i$. В качестве функции выигрыша мы можем выбрать, например, функцию

$$H((0, \ldots, 0), 1) = (-1, +1),$$
$$H((0, \ldots, 0), 2) = (+1, -1).$$

Первые исследования этой игры (часто называемой также игрой Ним) опубликовал Баутон [1] в 1902 г.

Пример 1.2.2. *Игра Фан-Тан порядка p.* Изменим правила игры Фан-Тан так, чтобы каждый игрок мог брать фрукты не более чем из p ваз, но брал их хотя бы из одной вазы ($1 < p \leqq m$).

Решение этой игры нашел Мур [1] в 1910 г.

Пример 1.2.3. Два игрока по очереди передвигают (скажем, фишку) по некоторому ориентированному графу. При этом ход означает передвижение фишки из одной вершины в другую по некоторой (направленной) дуге графа. Выигрывает тот, кто первым достигнет заранее оговоренного подмножества множества всех вершин (например, множества концевых вершин графа). Все игры этого типа называются играми Ним (или играми типа Ним). Они представляют собой обобщение игры Фан-Тан.

Пример 1.2.4. Рассмотрим некоторый дискретный случайный управляемый процесс следующего типа. Пусть в каждой точке x фазового пространства X допустимо множество управлений $U(x)$. Пусть, кроме того, известно, что если выбрано управление $u \in U(x)$, то фазовая точка x переходит в некоторую точку x' множества $V(x, u)$. Процесс начинается в заданном исходном состоянии x_A и заканчивается по достижении некоторой точки из заданного множества $X_0 \subset X$. В зависимости от окончательного состояния определяется выигрыш. Если мы будем считать случай, реализующий выбор $x' \in V(x, u)$, противником оптимизирующей стороны [1]), то возникает антагонистическая терминальная игра с множеством позиций

$$P = X \cup \{(x, u) \mid x \in X,\ u \in U(x)\}$$

и динамикой игры

$$\left.\begin{aligned} \gamma x &= \{(x, u) \mid u \in U(x)\}, \\ \gamma(x, u) &= \{x' \mid x' \in V(x, u)\} \end{aligned}\right\}, \quad x \in X \setminus X_0,$$
$$\gamma x = \varnothing, \qquad x \in X_0.$$

[1]) Сказанное, разумеется, имеет смысл лишь тогда, когда о вероятности, с которой осуществляется выбор $x' \in V(x, u)$, или ничего неизвестно, или известно «слишком мало».

Идея рассмотрения динамических случайных процессов управления с позиций теории антагонистических игр восходит к Н. Н. Воробьеву [3].

Поскольку в наших примерах бесконечные партии допускаются, необходимо обратить внимание на два следующих принципиально различных типа задач.

1. Требуется достижение некоторого окончательного состояния (например, именно это означает более или менее благоприятное осуществление замысла).

2. По возможности не должно достигаться никакое окончательное состояние (например, в противном случае происходила бы авария заданных масштабов).

Как мы увидим в гл. 3, эти две постановки задачи не эквивалентны и даже различны по сложности анализа.

Пример 1.2.5. Один из первых чемпионов мира по шахматам Эм. Ласкер описал в [1] следующую игру Фан-Тан трех лиц: три игрока ходят в циклическом порядке так же, как в игре Фан-Тан. Тот, кто делает последний ход, выигрывает у своего предшественника, а с последующим достигает ничьей. Если предположить, что игроки ходят в последовательности 1, 2, 3 и $x_0 = (0, \ldots, 0)$, то функцию выигрыша можно представить здесь в следующем виде:

$$H(x_0, 1) = (0, -1, +1),$$
$$H(x_0, 2) = (+1, 0, -1),$$
$$H(x_0, 3) = (-1, +1, 0).$$

§ 1.3. Стратегии, ситуации, функции выигрыша

Рассмотрим произвольную терминальную игру $\Gamma = (P, \gamma, H, n)$.

Определение 1.3.1. *Стратегией* игрока i в игре Γ называется отображение s_i: $P_i \to P$, для которого $s_i(p) \in \gamma p$ при любом $p \in P_i$.

Определение 1.3.2. *Ситуацией* в игре Γ называется отображение s: $P \setminus P_0 \to P$, для которого $s(p) \in \gamma p$ при любом $p \in P \setminus P_0$.

Стратегию s_i можно интерпретировать как план действий игрока i: как он будет ходить в каждой позиции (а именно из p в $s_i(p)$). Если игрок i решает делать ходы в соответствии со стратегией s_i, то будем говорить, что он *применяет* стратегию s_i. Каждый n-набор стратегий $(s_1, \ldots, s_n)$ определяет ситуацию s посредством равенства

$$s(p) = s_i(p), \quad \text{если} \quad p \in P_i,$$

и обратно. Поэтому мы будем отождествлять ситуацию s с соответствующим n-набором стратегий $(s_1, \ldots, s_n)$ и говорить, что складывается ситуация s, если каждый игрок i использует стратегию s_i.

Пусть, наконец, S_i и S — соответственно множество всех стратегий игрока i и множество всех ситуаций в игре Γ.

Если в ситуации s игрок i заменит свою стратегию s_i на стратегию t_i, то мы будем обозначать новую ситуацию через $s \| t_i$, т. е. полагать

$$s \| t_i = (s_1, \ldots, s_{i-1}, t_i, s_{i+1}, \ldots, s_n).$$

Если аналогично s и t — две ситуации, а K — некоторое подмножество множества игроков $I = \{1, \ldots, n\}$, то $s \| t_K$ будет ситуацией с компонентами вида t_i для $i \in K$ и вида s_i для $i \notin K$.

Пусть теперь задана произвольная начальная позиция p и складывается ситуация s. В этом случае партия определяется однозначно: одна за другой появляются позиции

$$(1) \qquad p, \; s(p), \; s(s(p)), \; \ldots .$$

Последовательность (1) мы будем обозначать через $F(p, s)$, а *множество* всех позиций, встречающихся в *последовательности* $F(p, s)$, — через $P(p, s)$.

Заметим, что множество $P(p, s)$ может оказаться конечным, хотя последовательность $F(p, s)$ при этом даже не обязана обрываться (например, если $s(p) = p$). Далее очевидно, что последовательность $F(p, s)$ конечна тогда и только тогда, когда $P(p, s) \cap P_0 \neq \varnothing$; во всех случаях это пересечение не более чем одноэлементно.

Положим, наконец,

$$D(s) = \{p \in P \mid P(p, s) \cap P_0 \neq \varnothing\},$$
$$D^{-1}(p) = \{s \in S \mid p \in D(s)\}.$$

Если $p \in D(s)$, то обозначим единственный элемент множества $P(p, s) \cap P_0$ через $p_0(p, s)$. Далее пусть

$$h_i^-(p, s) = \begin{cases} -\infty, & \text{если } p \notin D(s), \\ H_i(p_0(p, s)), & \text{если } p \in D(s); \end{cases}$$

$$h_i^+(p, s) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } p \notin D(s), \\ H_i(p_0(p, s)), & \text{если } p \in D(s). \end{cases}$$

Если ситуация s в условиях начальной позиции p приводит партию к концу, то $h_i^-(p, s)$, как и $h_i^+(p, s)$, приписывают игроку i соответствующий выигрыш.

Имеют место следующие равенства:

$$h_i^-(p, s) = h_i^+(p, s) = H_i(p) \quad \forall p \in P_0, \tag{2}$$

$$h_i^-(p, s) = h_i^-(p', s) \quad \forall p' \in P(p, s), \tag{3}$$

$$h_i^+(p, s) = h_i^+(p', s) \quad \forall p' \in P(p, s). \tag{4}$$

§ 1.4. Концепции решений

Поскольку мы предполагаем терминальные игры бескоалиционными, т. е. каждый игрок выбирает свою стратегию независимо от остальных, в качестве решений мы рассматриваем ситуации равновесия. При этом мы будем различать локальные и глобальные ситуации равновесия, в зависимости от того является ли начальная позиция фиксированной или переменной, а также сильные и слабые в связи с бесконечными партиями. Разумеется, все эти определения формулируются в терминах, относящихся к заданной игре $\Gamma = (P, \gamma, H, n)$.

Определение 1.4.1. Ситуация s называется *локальной слабой ситуацией равновесия для позиции p*, если существует такая позиция $p_0 = p_0(p) \in P_0$, что

(D 1) $p_0 \in P(p, s)$, если $p \in D(s)$;

(D 2) $h_i^-(p, s \| t_i) \leqq H_i(p_0) \quad \forall i \in I, \ \forall t_i \in S_i$.

В дальнейшем термин «ситуация равновесия» мы будем сокращенно записывать как СРВ.

Определение 1.4.2. Ситуация s называется *локальной сильной СРВ для позиции p*, если

$$h_i^+(p, s \| t_i) \leqq h_i^-(p, s) \quad \forall i \in I, \ \forall t_i \in S_i.$$

Определение 1.4.3. Ситуация s называется *глобальной слабой* (*сильной*) СРВ, если она является локальной слабой (сильной) СРВ одновременно для всех позиций.

Определение 1.4.4. Если s — глобальная слабая СРВ и f — отображение, которое ставит в соответствие каждой позиции p такой элемент $f(p) \in P_0$, что $p_0 = f(p)$ обладает свойствами (D 1) и (D 2) из определения 1.4.1, то f называется *функцией равновесия для s*.

Переходя к интерпретации различных вариантов понятий решения, начнем с локальной сильной СРВ s для позиции p. По определению функций h^+ и h^- она обладает тем свойством, что порождает некоторую конечную партию с начальной позицией p и никакой игрок, если он отклонится от этой ситуации в одиночку, не сможет добиться того, чтобы партия стала бесконечной. Кроме того, эта ситуация приемлема для каждого игрока, т. е. ни один игрок i не может увеличить свой выигрыш, применяя какую-либо другую стратегию t_i, пока остальные игроки придерживаются своих старых стратегий.

Интерпретация локальной слабой СРВ s существенно опирается на соответствующую ей позицию p_0. Последняя должна быть объективной (т. е. совпадать с фактически достигнутой окончательной позицией) в случае, когда s порождает конечную партию с начальной позицией p. Она, кроме того, должна быть приемлемой в том смысле, что никакой игрок i не может с помощью стратегии t_i — пока остальные игроки придерживаются своих стратегий — добиться конечной партии, которая дала бы ему выигрыш, больший, чем $H_i(p_0)$. Если $p \in D(s)$, то окончательную позицию p_0 (соответственно вектор выигрышей $H(p_0)$) можно рассматривать как приемлемый для всех игроков компромисс. Функция равновесия f для глобальной слабой ситуации равновесия s ставит в соответствие каждой позиции некоторый возможный относящийся к s компромисс.

Заметим, что каждая локальная сильная СРВ является одновременно и локальной слабой СРВ для соответствующей позиции.

§ 1.5. Частные классы терминальных игр и графов

Терминальные игры, очевидно, можно классифицировать с существенно различных точек зрения. Мы ограничимся здесь только перечислением некоторых важнейших классов. (Дальнейшие классы терминальных игр будут приведены в последующих главах.)

1. Терминальная игра называется *антагонистической*, если $n = 2$ и $H_1(p) = -H_2(p)$ для всех $p \in P_0$.

2. Терминальная игра называется *игрой с дискретными выигрышами*, если множество $H(P_0) = \{H(p) \mid p \in P_0\}$ конечно.

3. Терминальная игра называется *локально конечной в позиции p*, если каждая начинающаяся в p партия конечна; игра называется *локально конечной*, если все партии конечны

(по поводу определений «локальной конечности» и «локальной ограниченности» см. также книгу Бержа [1]).

4. Терминальная игра называется *локально ограниченной в позиции* p, если существует такое натуральное число $N(p)$, что каждая начинающаяся в p партия обрывается не более чем через $N(p)$ ходов; игра называется *локально ограниченной*, если существует конечная верхняя грань длин всех допустимых партий.

Будет ли терминальная игра $\Gamma = (P, \gamma, H, n)$ локально конечной (ограниченной) или нет, зависит, очевидно, только от определенной на P динамики игры γ. Мы будем называть пару (P, γ) *графом позиций* игры Γ. Фактически мы можем представлять себе (P, γ) как некоторый (ориентированный) граф, вообще говоря, с бесконечным множеством вершин P. При этом дуга от p к p' проводится тогда и только тогда, когда $p' \in \gamma p$. Таким образом, множество P_0 является множеством концевых вершин графа (рис. 1).

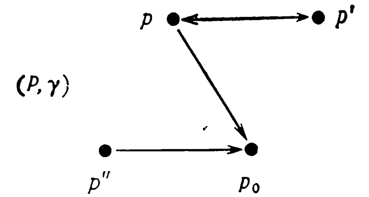

Рис. 1. $\gamma p = \{p', p_0\}$, $\gamma p'' = \{p_0\}$, $\gamma p' = \{p\}$, $\gamma p_0 = \varnothing$.

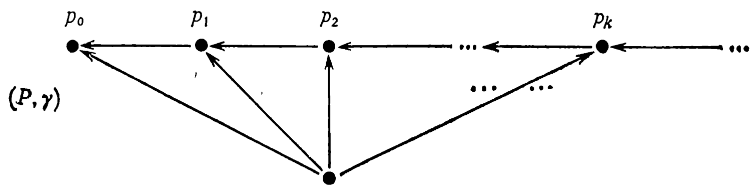

Рис. 2. $P = \{p, p_0, p_1, \ldots\}$, $\gamma p_k = \{p_{k-1}\}$ $(k > 0)$, $\gamma p_0 = \varnothing$, $\gamma p = P \setminus \{p\}$.

Поскольку, с другой стороны, каждый ориентированный граф хотя бы с одной концевой вершиной можно рассматривать как граф позиций некоторой игры Γ, мы будем говорить о локально конечных и локально ограниченных графах. Граф (P, γ) будем называть локально конечным (ограниченным) в вершине p, если некоторая терминальная игра (P, γ, H, n) является локально конечной (ограниченной) в вершине p. Так, представленный на рис. 1 граф локально ограничен в вершинах p_0 и p'', но не локально конечен в p и p'. Локально конечный, но не локально ограниченный в вершине p граф представлен на рис. 2 [1]).

§ 1.6. Локальная конечность и порядок графа

Установим один важный критерий локальной конечности и локальной ограниченности графа (P, γ). Мы покажем, что различие между этими двумя понятиями исчезает, если в качестве верхней грани длин партий вместо натуральных чисел допускаются трансфинитные числа. Идея приписывать каждой вершине порядковое число, представляющее длину некоторой партии, восходит к Кальмару [1]. Следующая ниже теорема 1.6.1 в приведенном здесь виде была сформулирована и доказана Бержем [1].

Рассмотрим предварительно отображение γ^+ («верхнее обращение» отображения γ):

$$\gamma^+ \colon\ 2^P \to 2^P; \quad \gamma^+ A = \{p \in P \mid \gamma p \subset A\} \quad (A \subset P)$$

и последовательно построим для каждого порядкового числа α следующие множества:

(D 1) $Q_0 = P_0$;
(D 2) $Q_\alpha = \gamma^+ Q_{\alpha-1}$, если у α есть *предшественник* $\alpha - 1$:
(D 3) $\Sigma_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} Q_\beta$, если у α нет предшественника и $\alpha > 0$.

Поэтому для каждого порядкового числа α имеет место равенство

$$(1) \qquad \gamma Q_\alpha \overset{\mathrm{df}}{=} \bigcup_{p \in Q_\alpha} \gamma p \subset \bigcup_{\beta<\alpha} Q_\beta.$$

Определение 1.6.1. Порядковое число α_0 называется *порядком графа* (P, γ), если $P = Q_{\alpha_0}$ и $P \neq Q_\alpha$ для всех $\alpha < \alpha_0$.

Так, например, согласно этому определению, граф, изображенный на рис. 1, не имеет порядка, поскольку $Q_0 = \{p_0\}$, $Q_1 = \{p_0, p''\}$ и $Q_\alpha = Q_1$ для $\alpha > 1$. Для графа на рис. 2

$$Q_k = \{p_0, \ldots, p_k\}, \quad P = Q_\omega,$$

где, как обычно, ω — порядковый тип естественно упорядоченного множества натуральных чисел. Таким образом, этот граф имеет порядок ω.

---

1) Этот пример заимствован у Бержа [1].

Теорема 1.6.1 (Берж). *Граф (P, γ) имеет порядок тогда и только тогда, когда он локально конечен.*

Доказательство. Пусть граф (P, γ) имеет порядок α_0. Рассмотрим произвольную последовательность таких вершин $\{p_t\}_{t=1, 2, \ldots}$, что для каждого t имеет место $p_{t+1} \in \gamma p_t$. Тогда для каждого t найдется наименьшее порядковое число $\alpha(t)$, для которого $p_t \in Q_{\alpha(t)}$.

Из (1) следует, что $\alpha(1) > \alpha(2) > \ldots$. Поскольку любая убывающая последовательность порядковых чисел конечна, последовательность $\{p_t\}$ не может быть бесконечной. Следовательно, граф (P, γ) локально конечен.

Предположим теперь, что граф (P, γ) не имеет порядка. Тогда для достаточно большого порядкового числа α_0 [1])

$$Q_{\alpha_0} = Q_{\alpha_0+1} \quad \text{и} \quad P \setminus Q_{\alpha_0} \neq \varnothing.$$

При $p \in P \setminus Q_{\alpha_0}$ мы получаем $\gamma p \cap (P \setminus Q_{\alpha_0}) \neq \varnothing$. Таким образом, имеет место $\gamma p \setminus Q_{\alpha_0} \neq \varnothing \ \forall p \in P \setminus Q_{\alpha_0}$. Это означает, что в $P \setminus Q_{\alpha_0}$ существует бесконечная последовательность связанных дугами вершин $\{p_t\}_{t=1, 2, \ldots}$ и граф (P, γ) не является локально конечным.

Значение этой теоремы состоит в том, что она дает возможность для локально конечных игр или графов доказывать различные утверждения трансфинитной индукцией по порядку графа.

§ 1.7. Задачи

1. Доказать, что в локально конечной терминальной игре каждая локальная (глобальная) слабая СРВ является локальной (глобальной) сильной СРВ.

2. Доказать, что граф, локально ограниченный в каждой своей вершине, не обязан быть локально ограниченным.

3. Пусть терминальная игра $\Gamma = (P, \gamma, H, n)$ локально ограничена в позиции $\bar{p}$. Последовательно образуем множества

$$P^0 = P_0, \quad P^1 = P^0 \cup \gamma^+ P^0, \ \ldots, P^{k+1} = P^k \cup \gamma^+ P^k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

и для любого подмножества $A \subset P$ положим

$$\gamma^+ A = \{p \in P \setminus P_0 \mid \gamma p \subset A\}.$$

Доказать, что тогда существует такой индекс k, что $\bar{p} \in P^k$.

Остается ли это утверждение в силе, если игра Γ локально конечна в $\bar{p}$?

---

[1]) Это утверждение строго доказывается в § П.3 приложения.

4. Пусть Г и Г′ — две терминальные игры, которые отличаются только функциями выигрыша H и H'. Пусть для любых окончательных позиций p_1 и p_2 и каждого $i \in I$ выполняется условие

$$H_i(p_1) < H_i(p_2) \Leftrightarrow H'_i(p_1) < H'_i(p_2).$$

Доказать, что тогда игры Г и Г′ имеют одинаковые ситуации равновесия.

5. Найти локально сильные СРВ в игре Фан-Тан (пример 1.2.1) с начальной позицией ((1, 3, 4), 1).

6. Построить терминальную игру, не имеющую глобальных слабых СРВ.

7. Являются ли шахматы локально конечной игрой?

2

Игры Ним

Игры Ним [1]) принадлежат к числу первых математически исследованных игр. Баше де Мезирак в своем изданном в 1612 г. сборнике математических развлечений [1] описывает следующую задачу: два игрока по очереди называют числа от нуля до десяти, прибавляя их к сумме уже названных чисел. Выигрывает тот, кто первым доведет эту сумму до ста.

Эта задача принадлежит классу игр типа Ним, которые экс-чемпион мира по шахматам Эм. Ласкер [1] называл «математическими состязаниями». Наиболее известным представителем таких игр несомненно является игра Фан-Тан. Именно она с ее оригинальным решением явилась исходным пунктом исследований Баутона [1] (1902 г.) и Мура [1] (1910 г.), которые затем были в некотором смысле завершены Гранди [1] (1939 г.) при помощи введенного им отображения, называемого ныне ф у н к ц и е й Г р а н д и.

Формально игра Ним определяется некоторым произвольным (ориентированным) графом (X, γ) с непустым множеством концевых вершин X_0. Мы определяем партию игры следующим образом: если задана вершина $x_1 \in X$, то игрок 1 должен выбрать некоторую вершину $x_2 \in \gamma x_1$. После этого ходит игрок 2, который выбирает вершину $x_3 \in \gamma x_2$; затем снова делает ход игрок 1 и т. д. Это продолжается до тех пор, пока не будет достигнута какая-либо вершина $x_k \in X_0$ (с $\gamma x_k = \varnothing$). Проигрывает по условию тот, кто не имеет больше хода, причем независимо от достигнутой концевой вершины (соответственно выигрывает сделавший последний ход).

Таким образом, игра Ним является частным случаем терминальной игры с дискретным выигрышем и графом

---

[1]) См. по этому поводу, например, Витгофф [1], Венсон [1], Гутьеррес [1]; автор следует написанию Ласкера [1] — Nimmspiel. [При этом получается непереводимая игра слов: Nimmspiel дословно означает «игра „возьми“». — *Ред.*]

позиций (P, γ') следующего вида:

$$P = \{(x, i) \mid x \in X, \ i \in \{1, 2\}\},$$
$$\gamma'(x, i) = \{(y, j) \mid y \in \gamma x, \ j \neq i\},$$
$$P_i = \{(x, i) \mid x \in X \setminus X_0\},$$
$$P_0 = \{(x, i) \mid x \in X_0, \ i \in \{1, 2\}\}.$$

Функцию выигрыша H будем представлять в следующей форме:

$$H(x, 1) = (-1, +1), \quad H(x, 2) = (+1, -1) \quad \forall x \in X_0;$$

тем самым игра оказывается антагонистической. Множества стратегий S_1 и S_2 обоих игроков здесь совпадают. Мы отождествляем их с множеством всех тех отображений s множества $X \setminus X_0$ в X, которые удовлетворяют условию $s(x) \in \gamma x$ для каждого $x \in X \setminus X_0$.

Основная проблема теории игр Ним состоит в нахождении ситуаций равновесия в таких играх, которые составляются из нескольких игр по определенным правилам. Так, можно представить себе, что игра Фан-Тан состоит из m игр Фан-Тан с единственной вазой в каждой игре при условии, что ход следует делать ровно в одной из этих игр. Естественно ожидать, что обладания определенной информацией о вершинах «игр-компонент» окажется достаточным для нахождения разумных стратегий в игре в целом. В § 2.2 и 2.3 мы исследуем, какой должна быть эта информация для *игр-сумм* и *игр-произведений*. В частности, мы покажем [1]), что функция Гранди, вообще говоря, непригодна для решения игр-сумм порядка p (вопреки одному утверждению Бержа из [1]).

В § 2.1 мы обратимся к описанию глобальных ситуаций равновесия посредством некоторого разбиения (выигрышно-проигрышного разбиения) множества вершин X. Этот параграф носит подготовительный к § 2.2 характер и дополняется п. 2.3.2, относящимся к существованию глобальных (сильных и слабых) ситуаций равновесия.

В целом же в данной главе мы затронем лишь некоторые вопросы, касающиеся теории игр Ним. Как можно усмотреть из приведенной литературы, имеется значительное число исследований этого интересного класса игр, а также многочисленных конкретных игр Ним (в частности, различных модификаций игры Фан-Тан и соответственно игры Ним), в подробности которых мы не можем здесь вдаваться. Хороший

[1]) Речь идет о теореме 2.2.4. — *Прим. ред.*

обзор развития теории игр Ним был сделан Смитом [1]. Некоторые «игры Ним n лиц» исследовались Гутьерресом [2] и Куммером [1].

§ 2.1. Глобальные ситуации равновесия и выигрышно-проигрышное разбиение

Для того чтобы охарактеризовать глобальные ситуации равновесия, рассмотрим прежде всего уже описанную игру Фан-Тан (пример 1.2.1). Поскольку эта игра локально конечна, сильные и слабые ситуации равновесия совпадают.

Ясно, что при определенных распределениях фруктов в m вазах начинающий проигрывает, если только его противник ходит разумно (например, при распределении $(3, 2, 1, 0, \ldots \ldots, 0)$), тогда как в других случаях он всегда может умелой игрой обеспечить себе выигрыш (например, при $(2, 1, 1, 0, \ldots \ldots, 0)$). Поэтому напрашивается предположение, что в игре Фан-Тан каждая вершина x является либо «проигрышной», либо «выигрышной», т. е. множество вершин X разбивается на два множества: проигрышных и выигрышных вершин. Если мы обозначим эти множества соответственно через X_V и X_G [1]), то должны быть справедливы следующие утверждения:

$$X_G \cap X_V = \varnothing,$$
$$X_G \cup X_V = X,$$

$x \in X_G \Rightarrow \gamma x \cap X_V \neq \varnothing$ (тот, кто делает ход в выигрышной вершине, имеет возможность предоставить противнику проигрышную вершину) и

$x \in X_V \Rightarrow \gamma x \cap X_V = \varnothing$ (тот, кто вынужден ходить в проигрышной вершине, предоставляет своему противнику только выигрышные вершины).

В описанной обстановке разумная стратегия каждого игрока состоит в том, чтобы каждый раз, как только это возможно, предоставлять своему противнику проигрышные вершины.

В действительности с помощью нахождения разбиения (X_G, X_V) множества вершин X можно решать не только игры Фан-Тан, но и любую локально конечную игру Ним. Иными словами, справедлива следующая теорема.

---

[1]) Индекс V — от немецкого Verlust (проигрыш), а G — от Gewinn (выигрыш). — *Прим. перев.*

Теорема 2.1.1 (Берж). *Множество вершин X каждой локально конечной игры типа Ним (X, γ) допускает единственное разбиение на два множества X_G и X_V, для которых*

1) $x \in X_G \Rightarrow \gamma x \cap X_V \neq \varnothing$,
2) $x \in X_V \Rightarrow \gamma x \cap X_V = \varnothing$.

Кроме того, ситуация $s = (s_1, s_2)$ этой игры является глобальной ситуацией равновесия тогда и только тогда, когда каждая стратегия s_i $(i = 1, 2)$ удовлетворяет условию

3) $s_i(x) \in X_V \quad \forall x \in X_G$.

Доказательство этой теоремы, которая является следствием из теорем 2.3.2 и 2.3.3, мы предоставляем читателю.

Определение 2.1.1. Разбиение (X_G, X_V) множества вершин X (произвольной) игры Ним (X, γ) называется *выигрышно-проигрышным разбиением* (сокращенно В-П-разбиением), если оно удовлетворяет условиям 1) и 2).

Множество X_V характеризуется этими двумя условиями как подмножество множества X, обладающее следующим свойством:

$$x \in X_V \Leftrightarrow \gamma x \cap X_V = \varnothing.$$

В терминологии, принятой в теории графов, такое подмножество называется *ядром* графа (X, γ). Такие «ядерные множества» играют центральную роль в теории кооперативных игр в силу того, что они определяют решения по Нейману и Моргенштерну, поскольку (X, γ) является «графом доминирования» [1]).

В игре Ним, *не* являющейся локально конечной, можно исходя из выигрышно-проигрышного разбиения найти непосредственно *глобальные слабые* ситуации равновесия.

Теорема 2.1.2. *Пусть (X_G, X_V) — выигрышно-проигрышное разбиение некоторой игры Ним (X, γ). Тогда каждая ситуация $s = (s_1, s_2)$, в которой стратегии s_i удовлетворяют условию* 3), *является глобальной слабой ситуацией равновесия, и функция равновесия f для ситуации равновесия s мо-*

---

[1]) С развитием теории кооперативных игр в ней приобретает значение и проблематика, не связанная с решением по Нейману — Моргенштерну; см. в связи с этим обзорную статью А. И. Соболева [1]*. — *Прим. ред.*

жет быть построена на основании правила

$$f(x, i) \in P((x, i), s) \cap P_0 \quad \forall (x, i) \in D(s),$$

$$f(x, i) = \begin{cases} (x_0, j), \text{ если } x \in X_G, \\ (x_0, i), \text{ если } x \in X_V \end{cases} \quad \forall (x, i) \notin D(s).$$

Здесь $j \neq i$, *а* x_0 — *произвольная вершина в* X_0.

Доказательство. Пусть $x \in X_G$. Если партия начинается с позиции (x, i) и игрок i применяет стратегию s, удовлетворяющую условию 3), то его противник j в силу первых двух условий будет делать ходы только в тех вершинах y, которые лежат в X_V. При этом безразлично, какую именно стратегию использует игрок j. Если разыгрывается конечная партия, то тем самым выигрывает игрок i и

$$h_j^-((x, i), s_i, t_j) \leqq H_j(f(x, i)) = -1 \quad \forall t_j \in S_j.$$

С другой стороны, должны выполняться неравенства

$$h_i^-((x, i), t_i, s_j) \leqq 1 = H_i(f(x, i)) \quad \forall t_i \in S_i.$$

Тем самым условие равновесности (D 2) из определения 1.4.1 удовлетворяется для всех позиций (x, i) с $x \in X_G$.

В случае $x \in X_V$, в силу того что $\gamma x \cap X_V = \varnothing$, мы аналогично получаем остальные соотношения:

$$h_i^-((x, i), t_i, s_j) \leqq -1 = H_i(f(x, i)) \quad \forall t_i \in S_i,$$

$$h_j^-((x, i), s_i, t_j) \leqq +1 = H_j(f(x, i)) \quad \forall t_j \in S_j.$$

Из теоремы 2.1.2, в частности, следует, что в игре Ним с выигрышно-проигрышным разбиением (X_G, X_V) игрок не может проиграть, если он начинает с хода в вершине из X_G и при этом каждый раз переводит игру в вершину из X_V.

Правда, в играх, не являющихся локально конечными, нельзя гарантировать ни существования, ни единственности выигрышно-проигрышного разбиения. В этом можно убедиться на примере графов, изображенных на рис. 3.

Из дальнейшего будет видно, что в тех случаях, когда выигрышно-проигрышного разбиения не существует или же оно неизвестно, глобальные слабые ситуации равновесия можно задавать с помощью *функции игры*, которая ставится в соответствие каждой игре Ним.

Рассмотрим теперь некоторую *локально конечную* игру Ним (X, γ). Согласно теореме 2.1.1, задача нахождения глобальной ситуации равновесия эквивалентна в этом случае нахождению выигрышно-проигрышного разбиения. Принципиально эта задача разрешима, хотя в общем случае, как

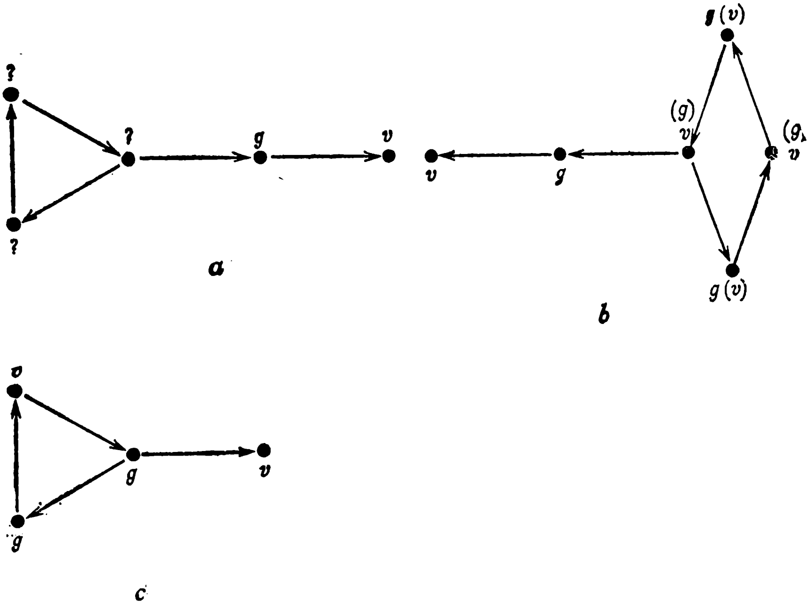

Рис. 3. a — нет В-П-разбиения; b — два В-П-разбиения; c — ровно одно В-П-разбиение, функции Гранди нет.

показывает уже игра Фан-Тан, далеко не проста. Напрашивающийся конструктивный метод состоит в том, чтобы, начиная с концевых вершин графа, рекурсивно расширять множества уже известных выигрышных и проигрышных вершин.

Шаг 1. Положим $M_0 = X_0$ (очевидно, что $M_0 \subset X_V$).

Шаг 2. Пусть для любой вершины из множества M_k уже известно, принадлежит ли она X_V или соответственно X_G. Построим $M_{kV} = X_V \cap M_k$, $M_{kG} = X_G \cap M_k$ и положим

$$A = \{x \in X \setminus M_k \mid \gamma x \subset M_{kG}\},$$

$$B = \{x \in X \setminus M_k \mid \gamma x \cap M_{kV} \neq \varnothing\}.$$

Тогда $A \subset X_V$ и $B \subset X_G$.

Шаг 3. Положим

$$M_{k+1} = M_k \cup A \cup B.$$

Сформулированные (после шага 2) утверждения $A \subset X_V$ и $B \subset X_G$ легко проверяются. А именно, из $x \in A$ следует $\gamma x \subset X_G$ и соответственно $\gamma x \cap X_V = \varnothing$. В силу условий 1), 2) и того, что множества X_V, X_G образуют разбиение X, получаем $x \in X_V$. Из $x \in B$ следует $\gamma x \cap X_V \neq \varnothing$, и тем самым $x \in X_G$.

Убедимся далее в том, что $M_{k+1} = M_k$ только в случае $M_k = X$; иначе говоря, если мы еще не знаем всего разбиения (X_V, X_G), то на каждом шаге мы получаем новую информацию. Если $M_{k+1} = M_k$ и $X \setminus M_k \neq \varnothing$, то, следовательно, $\gamma x \cap (X \setminus M_k) \neq \varnothing$ для всех $x \in X \setminus M_k$. Это означает, что существует некоторая партия, которая начинается в вершине $x \in X \setminus M_k$ и никогда не обрывается, если игроки выбирают вершины только из $X \setminus M_k$. Это противоречило бы нашему предположению о локальной конечности игры (X, γ).

Если не обращать внимание на технические сложности, которые могут встретиться на каждом шаге определения множеств M_k, то остается открытой еще одна проблема: в игре (X, γ), не являющейся локально ограниченной, может случиться, что $M_k \neq X$ для любого натурального k, т. е. после каждого шага остаются вершины, которые мы не можем еще назвать ни выигрышными, ни проигрышными. В этом случае по уже известным подмножествам M_{kV} и M_{kG} необходимо индуктивно определить вид всего разбиения (X_V, X_G). Этот шаг напоминает нахождение формулы суммы бесконечного ряда на основании известного конечного числа «частичных сумм». Он не поддается формализации.

§ 2.2. Функция Гранди и суммы порядка p

2.2.1. Обоснование и результаты в конечном случае

Центральный вопрос этого и следующего пунктов таков.

В чем состоит простейший способ определения выигрышно-проигрышного разбиения игры Ним, сконструированной из нескольких заданных игр Ним?

Для того чтобы ответить на этот вопрос, мы должны точно фиксировать, *как* именно эта игра конструируется из заданных игр.

Пусть (X_t, γ_t), $t = 1, 2, \ldots, m$, — произвольные игры Ним. Мы построим новую игру Ним (X, γ), предположив, что каждый игрок обязан ходить одновременно не менее чем в одной и не более чем в p $(1 \leq p \leq m)$ играх (X_t, γ_t). Игру (X, γ) назовем *суммой порядка p* игр (X_t, γ_t) и будем обозначать ее через

$$(X, \gamma) = \sum_{t=1}^{m}{}^{(p)} (X_t, \gamma_t).$$

Формально игра (X, γ) определяется следующим образом:

$$X = \prod_{t=1}^{m} X_t \stackrel{\mathrm{df}}{=} \{x = (x_1, \ldots, x_m) \mid x_t \in X_t,\ t = 1, \ldots, m\},$$

$$\gamma x = \bigcup_{\substack{M \subseteq \{1, \ldots, m\} \\ 1 \leq |M| \leq p}} \{y \in X \mid y_t \in \gamma_t x_t\ \forall t \in M,\ y_t = x_t\ \forall t \notin M\}.$$

Сумму порядка 1 будем для краткости называть просто «суммой». Она характеризуется тем, что ходить нужно ровно в одной из игр.

Сумма порядка p представляет собой коммутативную операцию над играми Ним. Каждая игра, множество вершин которой содержит только концевые вершины, является нулевым элементом относительно этой операции. Кроме того, при переменном m сумма ассоциативна.

Один из достойных анализа подходов к определению выигрышно-проигрышного разбиения игры-суммы порядка p мог бы заключаться в нахождении правила, по которому это разбиение строилось бы по соответствующим разбиениям «слагаемых» [например, в случае $m = 2$ для суммы локально конечных игр (X_t, γ_t):

$$x_1 \in X_{1V} \wedge x_2 \in X_{2V} \Rightarrow (x_1, x_2) \in X_V,$$

$$x_1 \in X_{1G} \wedge x_2 \in X_{2G} \Rightarrow (x_1, x_2) \in X_G].$$

Однако, если отвлечься от некоторых частных случаев, такого всеобщего правила нет: для того чтобы определить, является ли в игре-сумме фиксированного порядка вершина $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ проигрышной или нет, нужно знать о вершинах x_t существенно больше, нежели только множества выигрышно-проигрышного разбиения, которым они принадлежат. Необходимая информация о вершинах x_t будет в игре-сумме представляться значениями *функции Гранди* — отображения, ставящего в соответствие каждой вершине локально ограниченной игры некоторую вершину элементарной игры Фан-Тан[1]), представляемую как неотрицательное целое число, а каждой вершине локально конечной игры — некоторое порядковое число. Если образы вершин x_t в игре Фан-Тан являются проигрышными, то вершина $(x_1, \ldots, x_m)$ лежит в X_V, и наоборот. Тем самым мы грубо обрисовали идею, опирающуюся на использование функции Гранди. Отсюда вытекает необходимость обратиться к решению игры Фан-Тан и определению функции Гранди.

[1]) Элементарной игрой Фан-Тан мы называем игру Фан-Тан только с одной вазой.

Предварительно условимся обозначать λ-ю цифру двоичной записи произвольного целого неотрицательного числа z через $d_\lambda(z)$:

$$z = \sum_{\lambda=0,\ 1,\ 2,\ \ldots} d_\lambda(z) \cdot 2^\lambda,$$

а остаток от деления z на 2 — через $[z]_{\mathrm{mod}\ 2}$.

Теорема 2.2.1 (решение игры Фан-Тан; Баутон). *Пусть x_t $(1 \leqq t \leqq m)$ — число фруктов в вазе t. Положим*

$$F(x) = F(x_1, \ldots, x_m) = \sum_\lambda 2^\lambda \cdot \Big[\sum_t d_\lambda(x_t)\Big]_{\mathrm{mod}\ 2}.$$

Тогда для выигрышно-проигрышного разбиения игры Фан-Тан справедливо

$$F(x_1, \ldots, x_m) = 0 \Leftrightarrow x \in X_V.$$

Доказательство. По теореме 2.1.1 достаточно показать, что получающееся из условий $F(x) = 0$ и $F(x) \neq 0$ разбиение является выигрышно-проигрышным. Для этого докажем следующие утверждения.

(1) Если $F(x) = a > 0$, то существует такое $y \in \gamma^m x$, что $F(y) = 0$.

(2) Если $F(x) = 0$, то $F(y) \neq 0$ для всех $y \in \gamma^m x$.

Здесь γ^m обозначает динамику игры Фан-Тан. Следует отметить, что мы исходим из следующих свойств динамики элементарной игры Фан-Тан:

(a) тот, кто ходит, может произвольно уменьшить число фруктов;

(b) тот, кто ходит, обязан изменить число фруктов (он может также его и увеличить!).

Докажем (1). Запишем число a в двоичном представлении $a = \sum_\lambda d_\lambda(a) \cdot 2^\lambda$ и положим

$$\lambda^0 = \max\{\lambda \mid d_\lambda(a) = 1\}.$$

Тогда для некоторого t имеем

$$d_{\lambda^0}(x_t) = 1.$$

Зафиксируем t и положим для $\lambda \leqq \lambda^0$

$$y_{t\lambda} = [d_\lambda(a) + d_\lambda(x_t)]_{\mathrm{mod}\ 2}$$

и

$$y_t = \sum_{\lambda \leqq \lambda^0} 2^\lambda \cdot y_{t\lambda}.$$

Мы получаем, таким образом, что

$$y_t < x_t, \quad F(x_1, \ldots, x_{t-1}, y_t, x_{t+1}, \ldots, x_m) = 0,$$

и в силу (a) $(x_1, \ldots, x_{t-1}, y_t, x_{t+1}, \ldots, x_m) \in \gamma^m x$.

Докажем теперь (2). Поскольку каждый ход изменяет хотя бы одну двоичную цифру $d_\lambda(x_t)$ в точности для одного t (см. (b)), должно быть $F(y) \neq 0$ для любого $y \in \gamma^m x$.

Согласно теореме 2.2.1, в игре Фан-Тан число фруктов в каждой вазе следует представить в двоичной записи, а затем «сложить» их, не проделывая переноса из одного разряда в более высокий. «Оптимальная» стратегия состоит в том, чтобы привести своего противника в такую вершину, которой соответствует полученный этим способом нуль.

Рассмотрим теперь m произвольных игр Ним (X_t, γ_t) и предположим, что каждой вершине x_t t-й игры поставлена в соответствие некоторая вершина $g_t(x_t)$ элементарной игры Фан-Тан, причем так, что

(a′) $\{0, 1, \ldots, g_t(x_t) - 1\} \subset \{g_t(y_t) \mid y_t \in \gamma_t x_t\}$;

(b′) $g_t(x_t) \notin \{g_t(y_t) \mid y_t \in \gamma_t x_t\}$.

Далее, для игры-суммы $(X, \gamma) = \sum\limits_{t=1}^{m} (X_t, \gamma_t)$ из доказательства теоремы 2.2.1 вытекают следующие утверждения.

Если $F(g_1(x_1), \ldots, g_m(x_m)) > 0$, то существует такой y

(1′) $\qquad y \in \gamma(x_1, \ldots, x_m)$, что $F(g_1(y_1), \ldots, g_m(y_m)) = 0$.

Если $F(g_1(x_1), \ldots, g_m(x_m)) = 0$, то

(2′) $\qquad F(g_1(y_1), \ldots, g_m(y_m)) \neq 0 \quad \forall y \in \gamma(x_1, \ldots, x_m)$.

Это означает, однако, что множества

$$X_V = \{x = (x_1, \ldots, x_m) \mid F(g_1(x_1), \ldots, g_m(x_m)) = 0\},$$
$$X_G = \{x = (x_1, \ldots, x_m) \mid F(g_1(x_1), \ldots, g_m(x_m)) \neq 0\}$$

образуют выигрышно-проигрышное разбиение игры-суммы (X, γ). Одновременно обосновано следующее определение.

Определение 2.2.1. Отображение g, ставящее в соответствие каждой вершине x игры Ним (X, γ) некоторое порядковое число $g(x)$, называется *функцией Гранди* игры (X, γ), если оно удовлетворяет следующему условию:

$g(x)$ есть наименьшее порядковое число, не содержащееся в множестве $\{g(y) \mid y \in \gamma x\}$.

Если мы представим g как отображение P на множество конечных порядковых чисел, то ясно, что функция Гранди характеризуется соотношениями (a′) и (b′). Именно так она и была впервые определена Гранди [1]. Недостатком этого простого определения является то, что не каждая локально конечная игра Ним (если она не является локально ограниченной) обладает такой функцией Гранди. Примером может служить игра, определяемая следующим образом:

$$X = \{y,\ x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\},$$
$$\gamma x_0 = \varnothing,\quad \gamma x_k = \{x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{k-1}\}\qquad (k > 0),$$
$$\gamma y = \{x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\}.$$

Однако в условиях определения 2.2.1 справедлива следующая доказанная Бержем [2] теорема.

Теорема 2.2.2 (Берж). *Каждая локально конечная игра Ним имеет ровно одну функцию Гранди.*

Доказательство. По теореме 1.6.1 локально конечный граф имеет порядок. На множестве $Q_0 = X_0$ отображение g, очевидно, задается на основании определения 2.2.1 однозначно:

$$g(x) = 0\quad \forall x \in Q_0.$$

Если g однозначно определено на $Y = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} Q_\beta$, то для любого $x \in Q_\alpha$ в силу $\gamma x \subset \bigcup\limits_{\beta<\alpha} Q_\beta$ следует, что множество

$$\{g(y) \mid y \in \gamma x\},$$

а тем самым и значение $g(x)$ определяются однозначно.

Из определения функции Гранди немедленно вытекает следствие.

Следствие 2.2.1. *Если g является функцией Гранди игры Ним (X, γ), то разбиение*

$$X_V = \{x \in X \mid g(x) = 0\},\quad X_G = X \setminus X_V$$

является выигрышно-проигрышным разбиением этой игры.

Заметим, однако, что существование выигрышно-проигрышного разбиения, вообще говоря, еще не влечет существования функции Гранди. В этом можно убедиться, обратившись к графу, представленному на рис. 3.

Проведенные выше рассуждения показывают, что выигрышно-проигрышное разбиение игры-суммы $(X, \gamma) = \sum_{t=1}^{m} (X_t, \gamma_t)$ можно определить с помощью функций Гранди g_t игр (X_t, γ_t), если все они имеют своими значениями конечные порядковые числа. В этом случае можно положить

$$X_V = \{x \mid F(g_1(x_1), \ldots, g_m(x_m)) = 0\}, \quad X_G = X \setminus X_V.$$

Более того, нетрудно показать (аналогично доказательству теоремы 2.2.1), что функция

(3) $$g(x) = F(g_1(x_1), \ldots, g_m(x_m))$$

является функцией Гранди игры-суммы.

Из этого результата следует уже введенная интерпретация функции Гранди локально ограниченной игры: функция Гранди g_t ставит в соответствие каждой вершине x_t игры (X_t, γ_t) вершину $g_t(x_t)$ элементарной игры Фан-Тан, причем вершина $(x_1, \ldots, x_m)$ в игре-сумме (X, γ) является проигрышной тогда и только тогда, когда $(g_1(x_1), \ldots, g_m(x_m))$ является проигрышной вершиной в игре Фан-Тан. Таким образом, решение любой локально ограниченной игры-суммы с помощью функции Гранди можно свести к решению игры Фан-Тан.

Если же хотя бы одна функция g_t приписывает некоторой вершине x_t трансфинитное число $g_t(x_t)$, то принципиально здесь ничего не изменяется. Разумеется, мы должны при этом ввести пригодное для наших целей понятие «дуального представления» трансфинитных порядковых чисел. Оно вводится в следующем пункте.

2.2.2. Трансфинитный случай

Для того чтобы по известным функциям Гранди (допуская также трансфинитные) игр (X_t, γ_t) построить функцию Гранди игры-суммы $\sum_{t=1}^{m} (X_t, \gamma_t)$, нам потребуется специальное представление порядковых чисел, которому в конечном случае соответствует двоичное разложение. Мы получим его, поставив каждому порядковому числу α во взаимно однозначное соответствие некоторое конечное множество $M(\alpha)$ порядковых чисел. При этом наглядно $M(\alpha)$ можно представить себе как множество всех отличных от нуля «двоичных коэффициентов» $d_\lambda(\alpha)$. Для того чтобы использовать это соответствие, «вполне упорядочим» конечные множества порядковых чисел, т. е. определим бинарное отношение, определяющее полное упорядочение на каждом семействе конечных множеств порядковых чисел.

Определение 2.2.2. Пусть M и M' — два произвольных конечных множества порядковых чисел. Будем писать $M \succ M'$ и говорить, что M больше, чем M' (соответственно M' меньше, чем M), тогда и только тогда, когда существует такой элемент $\lambda_{M, M'} \in M \setminus M'$, что

$$\{\lambda \in M' \mid \lambda > \lambda_{M, M'}\} \subset M.$$

Если множества M и M' состоят только из конечных порядковых чисел, то $M \succ M'$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{\lambda \in M} 2^\lambda > \sum_{\lambda \in M'} 2^\lambda$$

$\left(\text{мы полагаем здесь } \sum_{\lambda \in \varnothing} 2^\lambda = 0\right)$. Отношению $\succ$ соответствует некоторый лексикографический порядок. Оно обладает следующими свойствами.

(E1) Для произвольных конечных множеств порядковых чисел M и M' имеет место одно и только одно из следующих утверждений:

$$M = M', \quad M \succ M', \quad M' \succ M.$$

(E2) Если $M \succ M'$ и $M' \succ M''$, то $M \succ M''$.

(E3) В любом непустом множестве $\mathfrak{M}$, элементами которого являются конечные множества порядковых чисел, существует минимальный элемент.

Свойство (E1) следует непосредственно из определения. Транзитивность в (E2) нетрудно проверить, положив $\lambda_{M, M''} = \max\{\lambda_{M, M'}, \lambda_{M', M''}\}$. Докажем (E3). Если $\varnothing \in \mathfrak{M}$, то, очевидно, минимальным элементом является $\varnothing$. Поэтому предположим, что $\varnothing \notin \mathfrak{M}$. Выпишем элементы каждого множества $M \in \mathfrak{M}$ в порядке их убывания

$$\lambda_1(M) > \lambda_2(M) > \ldots > \lambda_{k(M)}(M)$$

и положим

$$\lambda_1^0 = \min\{\lambda_1(M) \mid M \in \mathfrak{M}\},$$
$$\mathfrak{M}_1 = \{M \in \mathfrak{M} \mid \lambda_1(M) = \lambda_1^0\},$$

Указанные построения возможны, поскольку множество $\{\lambda_1(M) \mid M \in \mathfrak{M}\}$ как множество порядковых чисел содержит наименьший элемент. В случае $\{\lambda_1^0\} \in \mathfrak{M}_1$ $\{\lambda_1^0\}$ минимально в $\mathfrak{M}$ по отношению $\succ$. Если для $k = 1, 2, \ldots$ $\{\lambda_1^0, \ldots, \lambda_k^0\} \notin \mathfrak{M}_k$, то положим

$$\lambda_{k+1}^0 = \min\{\lambda_{k+1}(M) \mid M \in \mathfrak{M}_k\},$$
$$\mathfrak{M}_{k+1} = \{M \in \mathfrak{M}_k \mid \lambda_{k+1}(M) = \lambda_{k+1}^0\}.$$

Поскольку последовательность порядковых чисел $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots$ строго монотонно убывает, она конечна. Следовательно, существует такое (натуральное) $\bar{k}$, что $\{\lambda_1^0, \ldots, \lambda_{\bar{k}}^0\} \in \mathfrak{M}_{\bar{k}}$ и, следовательно, $M = \{\lambda_1^0, \ldots, \lambda_{\bar{k}}^0\}$ минимально в $\mathfrak{M}$.

В силу свойств (E1), (E2) и (E3) отношение $\succ$ порождает в каждом семействе конечных множеств порядковых чисел полное упорядочение.

Далее, для любого семейства $\mathfrak{M}$ конечных множеств порядковых чисел существует наименьшее (в смысле отношения $\succ$) среди всех конечных множеств порядковых чисел, не принадлежащих $\mathfrak{M}$. А именно, существует такое конечное множество порядковых чисел M, что $M \notin \mathfrak{M}$, поскольку нет множества всех конечных множеств порядковых чисел (ибо сами порядковые числа множества не образуют). Следовательно, мы можем образовать множество $\mathfrak{M}^0 = \{M' \mid M \succ M', M'$ — конечное множество порядковых чисел, $M' \notin \mathfrak{M}\}$, которое имеет наименьший элемент; этот элемент и является искомым множеством.

В заключение наших подготовительных рассуждений приведем правило, по которому каждому порядковому числу α ставится в соответствие одно и только одно конечное множество $M(\alpha)$ порядковых чисел, и обратно.

(D 1) $M(0) = \varnothing$.

(D 2) Пусть $M(\beta)$ уже определено для всех $\beta < \alpha$. Положим $M(\alpha) = M_\alpha$, где M_α является наименьшим (в смысле $\succ$) конечным множеством порядковых чисел, не принадлежащим множеству $\mathfrak{M}_\alpha = \{M(\beta) \mid \beta < \alpha\}$.

Таким путем мы, например, получаем

$$M(1) = \{0\}, \quad M(2) = \{1\}, \quad M(3) = \{0, 1\}, \ldots$$
$$M(\omega) = \{\omega\}, \quad M(\omega + 1) = \{0, \omega\}, \ldots$$
$$M(2\omega) = \{\omega + 1\}, \ldots .$$

Пусть теперь $M_1, \ldots, M_l, \ldots, M_m$ $(1 \leqq m < \infty)$ — произвольные конечные множества порядковых чисел. Образуем из них множество $A = A(M_1, \ldots, M_m)$ по следующему правилу:

$\lambda \in A \Longleftrightarrow \{t \mid \lambda \in M_t\}$ содержит нечетное число элементов.

Наконец, обозначим порядковое число α, однозначно определяемое равенством $M(\alpha) = A$, через $\mathfrak{F}(M_1, \ldots, M_m)$.

При этом множество A, рассматриваемое как композиция множеств, коммутативно и ассоциативно, т. е.

$$A(M_1, M_2) = A(M_2, M_1),$$
$$A(M_1, \ldots, M_m) = A(A(M_1, \ldots, M_t), A(M_{t+1}, \ldots, M_m)).$$

Теперь роль функции F, определенной в теореме 2.2.1, играет функция $\mathfrak{F}$.

Теорема 2.2.3. *Пусть g_t $(t = 1, \ldots, m)$ — произвольные функции Гранди игр (X_t, γ_t). Тогда функция g, определенная формулой*

$$g(x_1, \ldots, x_m) = \mathfrak{F}(M(g_1(x_1)), \ldots, M(g_m(x_m))),$$

является функцией Гранди игры $\sum_{t=1}^{m} (X_t, \gamma_t)$.

Доказательство. Обозначим игру-сумму через (X, γ). Необходимо показать, что

1) для каждого β, $\beta < g(x)$, существует такой $y \in \gamma x$, что $g(y) = \beta$;

2) $g(y) \neq g(x)$ $\forall y \in \gamma x$.

Доказываем 1). Из $\beta < g(x)$ следует $M(g(x)) > M(\beta)$. Следовательно, в $M(g(x)) \setminus M(\beta)$ существует такой максимальный элемент λ^0, что

$$\{\lambda \in M(\beta) \mid \lambda > \lambda^0\} \subset M(g(x)).$$

Кроме того, хотя бы для одного t должно выполняться условие $\lambda^0 \in M(g_t(x_t))$.

Зафиксируем такое t и построим множество

$$Y = A(M(g_t(x_t)), M(g(x)), M(\beta)).$$

В силу того что

$$M(\beta) = A[M(g_1(x_1)), \ldots, M(g_{t-1}(x_{t-1})), Y, M(g_{t+1}(x_{t+1})), \ldots \\ \ldots, M(g_m(x_m))],$$

нам осталось показать только, что существует такой $y_t \in \gamma_t x_t$, что $M(g_t(y_t)) = Y$. В силу выбора λ^0 должно быть

$$M(g(x)) \setminus \{\lambda \mid \lambda \leqq \lambda^0\} = M(\beta) \setminus \{\lambda \mid \lambda \leqq \lambda^0\},$$

а по определению Y

$$Y \setminus \{\lambda \mid \lambda \leqq \lambda^0\} = M(g_t(x_t)) \setminus \{\lambda \mid \lambda \leqq \lambda^0\}.$$

Далее, $\lambda^0 \in M(g_t(x_t)) \setminus Y$, откуда мы получаем

$$M(g_t(x_t)) > Y,$$

а в случае $Y = M(\alpha)$ еще и $g_t(x_t) > \alpha$. Поскольку g_t — функция Гранди, тем самым установлено существование такого $y_t \in \gamma_t x_t$, что $M(g_t(y_t)) = Y$.

Утверждение 2) очевидно, так как каждый ход в игре-сумме изменяет в точности одно множество $M(g_t(x_t))$.

Поскольку в играх-слагаемых функции Гранди существуют, то независимо от того, принимают ли эти функции конечные или трансфинитные значения, из последней теоремы в качестве следствия мы получаем существование функции Гранди в игре-сумме. Если все $g_t(x_t)$ конечны, то функция g из теоремы 2.2.3 совпадает с функцией, описанной равенством (3); см. п. 2.2.1. Таким образом, функции $\mathfrak{F}$ и F переходят одна в другую.

2.2.3. Границы применения функций Гранди

В двух предыдущих пунктах было установлено, что знания функции Гранди каждой из игр-слагаемых (X_t, γ_t) достаточно для нахождения выигрышно-проигрышного разбиения и тем самым разумных стратегий для игры-суммы $\sum_t (X_t, \gamma_t)$. Мы даже получаем снова функцию Гранди этой игры.

Если представить себе другие возможности компонирования игр Ним, то естественно возникает вопрос, можно ли, руководствуясь только значениями функции Гранди на вершинах x_t в отдельных играх, определить, является ли соответствующая вершина $x = (x_1, \ldots, x_m)$ игры в целом проигрышной или выигрышной. Здесь этот вопрос будет рассмотрен для игр-сумм порядка p $(p > 1)$. Результат, который мы получим, состоит в том, что в случаях $p = m$ и $p = m - 1$ ответ на этот вопрос положителен, а в случаях $1 < p < m - 1$ отрицателен. Кроме того, мы увидим, что для $1 < p \leqq m$, вообще говоря, невозможно вычислить какую-либо функцию Гранди игры-суммы $\sum_{t=1}^{m}{}^{(p)} (X_t, \gamma_t)$, исходя из функций Гранди g_t отдельных игр. Эти негативные результаты остаются верными и в том случае, когда все рассматриваемые игры локально ограничены.

Пусть N — множество всех неотрицательных целых чисел, и пусть

$$N_m = \{(c_1, \ldots, c_m) \mid c_k \in N,\ k = 1, \ldots, m\}.$$

Теорема 2.2.4. *Для игры-суммы порядка p имеют место следующие утверждения.*

(a) *Если g_t ($t = 1, \ldots, m$) — функции Гранди игр (X_t, γ_t), то множества*

$$X_V^{m-1} = \{(x_1, \ldots, x_m) \mid g_1(x_1) = \ldots = g_m(x_m)\},$$
$$X_G^{m-1} = X \setminus X_V^{m-1}$$

образуют выигрышно-проигрышное разбиение игры

$$(X, \gamma) = \sum_{t=1}^{m}{}^{(m-1)} (X_t, \gamma_t),$$

а множества

$$X_V^m = \{(x_1, \ldots, x_m) \mid g_1(x_1) = \ldots = g_m(x_m) = 0\},$$
$$X_G^m = X \setminus X_V^m$$

— выигрышно-проигрышное разбиение игры

$$(X, \gamma) = \sum_{t=1}^{m}{}^{(m)} (X_t, \gamma_t).$$

(b) *Если же $1 < p < m - 1$, то не существует такого отображения F_p: $N_m \to N$, что выигрышно-проигрышное разбиение каждой локально ограниченной игры $(X, \gamma) = \sum_{t=1}^{m}{}^{(p)} (X_t, \gamma_t)$ имеет вид*

$$X_V = \{x = (x_1, \ldots, x_m) \mid F_p(g_1(x_1), \ldots, g_m(x_m)) = 0\},$$
$$X_G = X \setminus X_V,$$

где g_t — функции Гранди игр (X_t, γ_t).

Доказательство. (a) Докажем только первую часть утверждения, поскольку вторая доказывается аналогично.

Пусть $x \in X \setminus X_V^{m-1}$. Тогда множество $S = \{s \mid g_s(x_s) > \min_t g_t(x_t)\}$ содержит не менее одного и не более $m - 1$ элементов. Если мы выберем для каждого $s \in S$ такой $y_s^0 \in \gamma_s x_s$, что $g_s(y_s^0) = \min_t g_t(x_t)$, то для $y = (y_1, \ldots, y_m)$, где

$$y_t = \begin{cases} x_t & \text{для } t \notin S, \\ y_t^0 & \text{для } t \in S, \end{cases}$$

будет как $y \in \gamma x$, так и $y \in X_V^{m-1}$, т. е. $\gamma x \cap X_V^{m-1} \neq \varnothing$.

С другой стороны, для всех $x \in X_V^{m-1}$ имеет место $\gamma x \cap \cap X_V^{m-1} = \varnothing$ и, следовательно, заданное разбиение является выигрышно-проигрышным.

(b) Предположим противное: пусть F_p для некоторого фиксированного p есть такое (однозначное) отображение N_m в N, что проигрышные вершины каждой локально ограниченной игры-суммы $\sum_{t=1}^{m}{}^{(p)}(X_t, \gamma_t)$ игр (X_t, γ_t) с функциями Гранди g_t имеют приведенный выше вид.

Очевидно, что игра $(X, \gamma) = \sum_{t=1}^{m}{}^{(p)}(X_t, \gamma_t)$ является локально ограниченной тогда и только тогда, когда таковыми являются все игры (X_t, γ_t). В частности, можно предположить, что игры (X_t, γ_t) для $p+2 < t \leqq m$ имеют только концевые вершины и, таким образом, $\gamma_t X_t = \varnothing$. В этих предположениях мы исследуем вид F_p в точках

$$(c_1, c_2, \ldots, c_{p+2}, 0, \ldots, 0), \quad c_t \in N, \quad 1 \leqq t \leqq p+2.$$

Если $F_p(c_1, c_2, \ldots, c_{p+2}, 0, \ldots, 0) = 0$ только в случае $c_1 = = c_2 = \ldots = c_{p+2}$, то мы легко приходим к противоречию: достаточно положить $c_1 = c_2 = \ldots = c_{p+1} = 1$, $c_{p+2} = 0$, отождествить (X_t, γ_t) для $t \leqq p+2$ с элементарной игрой Фан-Тан (одна ваза) и положить $x_t = 1$ для $t \leqq p+1$ и $x_t = 0$ для $t = p+2$. Тогда

$$F_p(g_1(x_1), \ldots, g_{p+2}(x_{p+2}), 0, \ldots, 0) \neq 0,$$

т. е. $x \in X_0$, но, очевидно, $\gamma x \cap X_V = \varnothing$, поскольку одновременно разрешается ходить только в p, но не в $p+1$ играх. Следовательно, равенство

$$F_p(c_1, c_2, \ldots, c_{p+2}, 0, \ldots, 0) = 0$$

должно выполняться хотя бы для одного набора несовпадающих c_t. Не умаляя общности, можно считать, что $c_1 < c_2$. Отождествим снова (X_t, γ_t) при $2 \leqq t \leqq p+2$ с элементарной игрой Фан-Тан и положим $x_t = c_t$. Определим игру (X_1, γ_1), положив

$$X_1 = \{a_0, a_1, \ldots, a_{c_1}, b_0, b_1, \ldots, b_{c_2}\},$$
$$\gamma_1 a_0 = \gamma_1 b_0 = \varnothing,$$
$$\gamma_1 a_r = \{a_0, \ldots, a_{r-1}\}, \qquad 1 \leqq r < c_1,$$
$$\gamma_1 a_{c_1} = \{b_{c_2}, a_0, \ldots, a_{c_1-1}\},$$
$$\gamma_1 b_s = \{b_0, \ldots, b_{s-1}\}, \qquad 1 \leqq s \leqq c_2.$$

Так определенная игра (X_1, γ_1) локально ограничена и обладает функцией Гранди

$$g_1(a_r) = g_1(b_r) = r, \qquad 0 \leqq r \leqq c_1,$$
$$g_1(b_s) = s, \qquad c_1 + 1 \leqq s \leqq c_2.$$

Положим далее $x_1 = a_{c_1}$. Так как $g_t(x_t) = c_t$ для $1 \leqq t \leqq p+2$, то $x \in X_V$.

Пусть теперь $y_1 = b_{c_2} (\in X_1)$ и $y_2 = c_1 (\in X_2)$. Тогда $y_1 \in \in \gamma_1 x_1$, $y_2 \in \gamma_2 x_2$ и $(y_1, y_2, x_3, \ldots, x_{p+2}) \in \gamma x$. Таким образом, должно выполняться

$$F_p(g_1(y_1), g_2(y_2), g_3(x_3), \ldots, g_{p+2}(x_{p+2}), 0, \ldots, 0) \neq 0.$$

Это означает, что

$$F_p(c_2, c_1, c_3, \ldots, c_{p+2}, 0, \ldots, 0) \neq 0,$$

т. е. функция F_p не симметрична. Так как сумма порядка p является коммутативной композицией игр Ним, это, очевидно, противоречит сделанным предположениям о свойствах функции F_p.

Из теоремы 2.2.4, в частности, следует, что для наиболее интересных случаев $1 < p < m - 1$ нет какой-либо формулы, по которой можно было бы вычислять значения функции Гранди любой локально ограниченной игры-суммы порядка p только по функциям Гранди m слагаемых.

В случаях $p = m - 1$ и $p = m$ $(m > 1)$ такая формула также может не существовать, хотя выигрышно-проигрышное разбиение каждой игры-суммы этого порядка уже определяется по функциям Гранди слагаемых. Предположение о том, что для некоторого отображения F_p: $N_m \to N$ функция

$$g(x_1, \ldots, x_m) = F_p(g_1(x_1), \ldots, g_m(x_m)),$$

где g_t — функции Гранди игр (X_t, γ_t), является функцией Гранди для любой локально ограниченной игры $\sum\limits_{t=1}^{m}{}^{(p)}(X_t, \gamma_t)$ $(p > 1)$, можно опровергнуть следующим образом: прежде всего ясно, что функция F_p должна быть симметричной по всем аргументам. Выберем теперь игру (X_1, γ_1) так, что

$$X_1 = \{x_0^1, x_1^1, x_2^1\}, \quad \gamma_1 x_0^1 = \varnothing, \quad \gamma_1 x_1^1 = \{x_0^1\}, \quad \gamma_1 x_2^1 = \{x_1^1\},$$

функцией Гранди этой игры будет $g_1(x_0^1) = g_1(x_2^1) = 0$, $g_1(x_1^1) = 1$, в игре же (X_2, γ_2) положим $X_2 = \{x_0^2, x_1^2\}$, $\gamma_2 x_0^2 = \varnothing$, $\gamma_2 x_1^2 = = \{x_0^2\}$, так что $g_2(x_0^2) = 0$ и $g_2(x_1^2) = 1$.

Пусть остальные игры (X_t, γ_t), $t > 2$, являются произвольными локально ограниченными играми. Выберем в них произвольные вершины x_t и рассмотрим значение функции Гранди

$$F_p(g_1(x_2^1),\ g_2(x_1^2),\ g_3(x_3),\ \ldots,\ g_m(x_m)) = \\ = F_p(0,\ 1,\ g_3(x_3),\ \ldots,\ g_m(x_m))$$

на вершине $(x_2^1,\ x_1^2,\ x_3,\ \ldots,\ x_m)$ в игре $\sum_{t=1}^{m}{}^{(p)}(X_t,\ \gamma_t)$. Оно должно отличаться от значений функции Гранди на всех тех вершинах, которых можно достичь из $(x_2^1,\ x_1^2,\ x_3,\ \ldots,\ x_m)$ за один ход. К ним, в частности (в силу того что $p > 1$), относится вершина $(x_1^1,\ x_0^2,\ x_3,\ \ldots,\ x_m)$ со значением функции Гранди

$$F_p(g_1(x_1^1),\ g_2(x_0^2),\ g_3(x_3),\ \ldots,\ g_m(x_m)) = \\ = F_p(1,\ 0,\ g_3(x_3),\ \ldots,\ g_m(x_m)).$$

Это, однако, противоречит симметричности F_p. Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 2.2.5. *Пусть $1 < p \leqq m$. Тогда не существует такого отображения F_p: $N_m \to N$, что функция Гранди g любой локально ограниченной игры $\sum_{t=1}^{m}{}^{(p)}(X_t,\ \gamma_t)$ и функции Гранди g_t игр (X_t, γ_t) удовлетворяют в каждой точке $(x_1,\ \ldots,\ x_m)$ уравнению*

$$g(x_1,\ \ldots,\ x_m) = F_p(g_1(x_1),\ \ldots,\ g_m(x_m)).$$

Такое отображение F_p существует только в случае $p = 1$.

Резюмируя, мы приходим к следующим выводам.

1. Однозначно определяемое выигрышно-проигрышное разбиение локально конечной игры Ним можно рассматривать как ее решение. Для игр Ним, не являющихся локально конечными, в общем случае нельзя гарантировать ни существования, ни единственности этого разбиения.

2. Решение (т. е. выигрышно-проигрышное разбиение) локально конечной игры-суммы $\sum_{t=1}^{m}{}^{(p)}(X_t,\ \gamma_t)$ порядка p можно определить при помощи функций Гранди, если $p = 1$, $p = m - 1$ или $p = m$.

В остальных случаях знания одних только функций g_t для определения решения, вообще говоря, недостаточно (даже если все рассматриваемые игры локально ограничены).

3. Функция Гранди игры-суммы $\sum_{t=1}^{m}(X_t, \gamma_t)$ порядка 1 существует, если каждая игра (X_t, γ_t) имеет функцию Гранди g_t. В этом случае функцию Гранди игры-суммы можно определить с помощью функций g_t.

Для построения функции Гранди игры-суммы $\sum_{t=1}^{m}{}^{(p)}(X_t, \gamma_t)$ порядка p в случае $p > 1$ знания функций Гранди слагаемых, вообще говоря, недостаточно (даже если все рассматриваемые игры локально ограничены).

§ 2.3. Функция игры и произведение игр Ним

В этом параграфе мы рассмотрим произвольную, не обязательно локально конечную игру Ним (X, γ). Как мы уже знаем, она может и не иметь какого-либо выигрышно-проигрышного разбиения. Таким образом, в вопросе о существовании ситуаций равновесия в такой игре нам опять приходится начинать с начала. Интуитивно ясно, что в общем случае множество X должно распадаться на *три* непересекающихся подмножества X_G, X_V, X_R, состоящих соответственно из выигрышных, проигрышных и ничейных вершин[1]). Говоря точнее, если мы представим себе двух «идеальных игроков», то в некоторых вершинах начинающий будет всегда выигрывать, в других всегда проигрывать, а в остальных начальных вершинах выиграть не сможет ни один из игроков. В последнем случае партия никогда бы не обрывалась. Согласно этой интерпретации, множества X_G, X_V, X_R удовлетворяют следующим условиям:

(1) $\quad \gamma x \cap X_V \neq \varnothing \quad \forall x \in X_G,$

(2) $\quad \gamma x \cap X_V = \varnothing, \quad \gamma x \cap X_R \neq \varnothing \quad \forall x \in X_R,$

(3) $\quad \gamma x \subset X_G \quad \forall x \in X_V.$

2.3.1. Определение функции игры

Для определения функции игры нам понадобится понятие *четного* и соответственно *нечетного порядкового числа.* Это понятие основано на том, что каждое порядковое число α можно однозначно представить в виде

$$\alpha = \lambda(\alpha) + k(\alpha),$$

где $k(\alpha)$ — конечное порядковое число, а $\lambda(\alpha)$ — предельное число, т. е. порядковое число, не имеющее предшественника.

---

[1]) Индекс R — от немецкого Remis (ничья). — *Прим. перев.*

Если $k(\alpha)$ (понимаемое как целое неотрицательное число) четно, то и α называется **четным**, а в противном случае α называется **нечетным**. В частности, все предельные числа четны. Обозначим далее множества всех нечетных и четных порядковых чисел, меньших α, соответственно через $W_u(\alpha)$ и $W_g(\alpha)$[1]. Тогда для каждой игры Ним (X, γ) на множестве вершин X можно следующим образом определить функцию I, значениями которой являются порядковые числа или ∞.

(D 1) Положим $I(x) = 0 \Leftrightarrow \gamma x = \varnothing$.

(D 2) Пусть для каждого β, $\beta < \alpha$, уже определено множество $I^{-1}(\beta)$:

$$I^{-1}(\beta) \overset{\mathrm{df}}{=} \{x \in X \mid I(x) = \beta\}.$$

Рассмотрим множество $X^\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} I^{-1}(\beta)$ и положим:

если α нечетно, то

$$I(x) = \alpha \Leftrightarrow x \in X \setminus X^\alpha \wedge \gamma x \cap \Big(\bigcup_{\beta \in W_g(\alpha)} I^{-1}(\beta)\Big) \neq \varnothing;$$

если α четно, то

$$I(x) = \alpha \Leftrightarrow x \in X \setminus X^\alpha \wedge \gamma x \subset \bigcup_{\beta \in W_u(\alpha)} I^{-1}(\beta).$$

(D 3) Положим $I(x) = \infty$ для каждого элемента $x \in X$, которому по (D 1) и (D 2) в процессе индукции не поставлено в соответствие порядковое число $I(x)$.

Назовем так определенную функцию I *функцией игры* (X, γ).

Для того чтобы правила (D 1), (D 2) и (D 3) вообще определяли какую-либо функцию I, должен быть разрешим вопрос, ставится ли посредством (D 1) и (D 2) в соответствие некоторому фиксированному элементу x порядковое число или нет. Этот вопрос отнюдь не является тривиальным, так как в силу того, что не существует множества M всех порядковых чисел, нельзя построить множество $\bigcup\limits_{\alpha \in M} I^{-1}(\alpha)$, которому данный элемент должен был бы принадлежать или нет. Однако справедлива следующая лемма.

[1] Индексы в обозначениях W_g и W_u происходят от немецких слов gerade (четное) и ungerade (нечетное).— *Прим. перев.*

Лемма 2.3.1. *Для каждого графа* (X, γ) *существует такое порядковое число* α_0, *что для определенных с помощью* (D 1) *и* (D 2) *подмножеств* $I^{-1}(\alpha)$ *множества* X *справедливо равенство*

$$I^{-1}(\alpha) = \varnothing, \quad \textit{если} \quad \alpha \geqq \alpha_0.$$

Доказательство. Если $I^{-1}(\alpha_0) = \varnothing$ для некоторого порядкового числа α_0, то в силу (D 2) будет $I^{-1}(\alpha) = \varnothing$ и для всех $\alpha > \alpha_0$. Предположим теперь, что вопреки утверждению леммы для каждого порядкового числа α_0 будет $I^{-1}(\alpha_0) \neq \varnothing$. Зафиксируем произвольное α_0 и рассмотрим множества $I^{-1}(\alpha)$ для $\alpha < \alpha_0$. Все они непусты и попарно не пересекаются. Выбрав для каждого $\alpha < \alpha_0$ некоторый элемент $x_\alpha \in I^{-1}(\alpha)$, можно рассмотреть подмножество

$$T = \{x_\alpha \mid \alpha < \alpha_0\}$$

множества X и вполне упорядочить его, положив

$$x_\alpha < x_\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta.$$

Порядковый тип T есть α_0. Следовательно, X имеет по меньшей мере мощность некоторого вполне упорядоченного множества типа α_0. Но таким образом мы немедленно приходим к противоречию, поскольку α_0 было произвольным, и, в частности, α_0 может представлять порядковый тип некоторого вполне упорядоченного множества большей мощности, нежели X.

Согласно лемме 2.3.1, функция игры I полностью определена. Именно, если мы выберем α_0 так, что $I^{-1}(\alpha_0) = \varnothing$, то

$$I^{-1}(\infty) = X \setminus \bigcup_{\alpha < \alpha_0} I^{-1}(\alpha).$$

Пример 2.3.1. (Ср. рис. 4.)

$$\begin{aligned}
&X = \{y_1, y_2, y_3, x_0, x_1, x_2, \ldots\},\\
&\gamma x_0 = \varnothing, \quad \gamma x_k = \{x_{k-1}\} \qquad (k = 1, 2, \ldots),\\
&\gamma y_1 = \{x_k \mid k \text{ нечетно}\},\\
&\gamma y_2 = \{y_1\}, \quad \gamma y_3 = \{y_2, y_3\}.
\end{aligned}$$

Здесь имеет место

$$I(x_k) = k, \quad I(y_1) = \omega, \quad I(y_2) = \omega + 1, \quad I(y_3) = \infty.$$

Идея введения такого определения функции игры уже встречалась в работе Г. П. Буцана и Л. П. Варвака [1], однако она была осуществлена некорректно. А именно, если для значений функции I допустить, как это там делается, только целые неотрицательные числа и ∞, то определяемая правилами (D 1), (D 2) и (D 3), вообще говоря, только для случая конечного множества вершин X функция обладает тем свойством, что $I^{-1}(k)=\varnothing$ для достаточно больших k. Это видно из примера 2.3.1. Как следствие, так определяемая функция игры не обладает для $|X|=\infty$ свойством $\gamma x \cap$

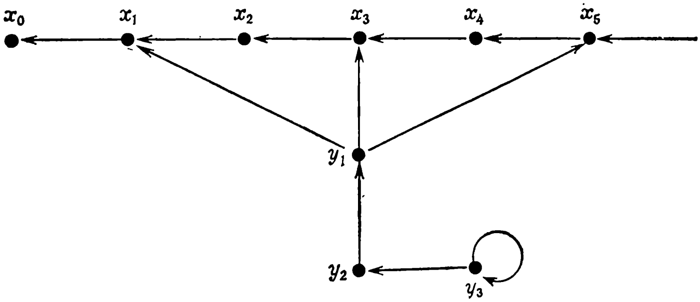

Рис. 4.

$\cap I^{-1}(\infty)\neq\varnothing$ $\forall x\in I^{-1}(\infty)$, которое оказывается существенным для последующих утверждений.

При дополнительном предположении $|X|<\infty$ утверждения Г. П. Буцана и Л. П. Варвака [1] остаются верными, и мы следуем их изложению при доказательстве теорем 2.3.1 и 2.3.4.

2.3.2. Функция игры и оптимальные стратегии в игре Ним

Связь между глобальными СРВ и функцией игры некоторой игры Ним (X,γ) можно описать с помощью определенных свойств этой функции, которые мы сейчас установим.

Теорема 2.3.1. *Функция игры является единственной функцией, которая каждой вершине x игры Ним (X,γ) ставит в соответствие порядковое число $I(x)$ или ∞ и обладает следующими свойствами*:

(4) $\quad I(x)=0\Rightarrow\gamma x=\varnothing;$

(5) $\quad (I(x)=\alpha)\wedge(\alpha \text{ нечетно})\wedge(\beta\in W_g(\alpha-1))\Rightarrow$
$$\Rightarrow(\gamma x\cap I^{-1}(\alpha-1)\neq\varnothing)\wedge(\gamma x\cap I^{-1}(\beta)=\varnothing);$$

(6) $\quad (I(x)=\alpha)\wedge(\alpha \text{ четно})\wedge(\alpha'<\alpha)\Rightarrow$
$$\Rightarrow\Big(\gamma x\subset\bigcup_{\beta\in W_u(\alpha)} I^{-1}(\beta)\Big)\wedge\Big(\gamma x\not\subset\bigcup_{\beta\in W_u(\alpha')} I^{-1}(\beta)\Big);$$

(7) $\quad (I(x)=\infty)\wedge(\beta \text{ четно})\Rightarrow$
$$\Rightarrow(\gamma x\cap I^{-1}(\infty)\neq\varnothing)\wedge(\gamma x\cap I^{-1}(\beta)=\varnothing).$$

Доказательство. Прежде всего убедимся в том, что функция игры действительно удовлетворяет всем требованиям. Свойство (4) тривиально в силу (D 1). Справедливость (5) и (6) получается по индукции из (D 2). Если, наконец, $I(x) = \infty$, то для четных β $\gamma x \cap I^{-1}(\beta) = \varnothing$, в других же случаях в силу (D 2) $I(x)$ было бы нечетным порядковым числом. Если мы выберем такое α_0, что $I^{-1}(\alpha_0) = \varnothing$, то из $\gamma x \cap \cap I^{-1}(\infty) = \varnothing$ следует, что

$$\gamma x \subset \bigcup_{\beta \in W_u(\alpha_0)} I^{-1}(\beta),$$

и в силу (D 2) $I(x)$ было бы четным. Следовательно, может выполняться только $\gamma x \cap I^{-1}(\infty) \neq \varnothing$, и, таким образом, имеет место (7).

Предположим теперь, что существуют две несовпадающие функции I_1 и I_2, удовлетворяющие условиям (4)—(7) и ставящие в соответствие каждой вершине x некоторое порядковое число или ∞.

Тогда среди всех порядковых чисел, для которых $I_1^{-1}(\alpha) \neq \neq I_2^{-1}(\alpha)$, существует наименьшее. Обозначим его через $\bar{\alpha}$, предположим, не умаляя общности, что $I_1^{-1}(\bar{\alpha}) \setminus I_2^{-1}(\bar{\alpha}) \neq \varnothing$, и выберем произвольно $x \in I_1^{-1}(\bar{\alpha}) \setminus I_2^{-1}(\bar{\alpha})$.

Случай 1. $\bar{\alpha}$ четно. В этом случае из (4), (6) и выбора $\bar{\alpha}$ следует, что

$$\gamma x \subset \bigcup_{\beta \in W_u(\bar{\alpha})} I_1^{-1}(\beta) = \bigcup_{\beta \in W_u(\bar{\alpha})} I_2^{-1}(\beta).$$

В силу (5) и (7) число $I_2(x)$ также должно быть четным. Поскольку $I_2(x) > \bar{\alpha}$, (6) приводит к противоречию:

$$\gamma x \not\subset \bigcup_{\beta \in W_u(\bar{\alpha})} I_2^{-1}(\beta).$$

Случай 2. $\bar{\alpha}$ нечетно. Тогда из (5) и выбора $\bar{\alpha}$ имеем

$$\gamma x \cap I_1^{-1}(\bar{\alpha} - 1) = \gamma x \cap I_2^{-1}(\bar{\alpha} - 1) \neq \varnothing.$$

Следовательно, $I_2(x)$ может быть только нечетным и не большим, чем $\bar{\alpha}$. Так как $I_2(x) > \bar{\alpha}$, мы приходим к противоречию.

Тем самым теорема доказана.

Таким образом, свойства (4)—(7) определяют функцию игры как отображение, однозначно ставящее в соответствие каждой вершине графа позиций некоторое порядковое число или ∞.

Пусть X_G, X_V и X_R — следующие подмножества множества вершин X графа (X, γ):

$$X_G = \{x \mid I(x) \text{ нечетно}\},$$
$$X_V = \{x \mid I(x) \text{ четно}\},$$
$$X_R = \{x \mid I(x) = \infty\}.$$

Они образуют разбиение множества X, тесно связанное с выигрышно-проигрышным разбиением.

Теорема 2.3.2. *Разбиение (X_G, X_V, X_R) обладает следующими свойствами*:

(8) $\quad \gamma x \cap X_V \neq \varnothing \qquad \forall x \in X_G,$

(9) $\quad \gamma x \cap X_V \neq \varnothing \wedge \gamma x \cap X_R \neq \varnothing \qquad \forall x \in X_R,$

(10) $\quad \gamma x \subset X_G \qquad \forall x \in X_V,$

(11) $\quad X_R = \varnothing$, *если (X, γ) локально конечна.*

Доказательство. Свойства (8)—(10) немедленно следуют из (4)—(7). Поскольку $\gamma x \cap X_R = \varnothing$ для каждой вершины $x \in X_R$, в случае $X_R \neq \varnothing$, очевидно, возможна некоторая бесконечная партия. Следовательно, (11) также имеет место.

Из (8), (10) и (11) непосредственно видно, что каждая локально конечная игра имеет выигрышно-проигрышное разбиение. Далее, если $\left(X_G^1, X_V^1\right)$ и $\left(X_G^2, X_V^2\right)$ — два выигрышно-проигрышных разбиения, то для каждой вершины x,

$$x \in M \overset{\mathrm{df}}{=} \left(X_V^1 \setminus X_V^2\right) \cup \left(X_V^2 \setminus X_V^1\right),$$

из свойств выигрышно-проигрышного разбиения следует, что

$$\gamma x \cap M \neq \varnothing.$$

Таким образом, непустота множества M влечет существование бесконечной партии, откуда следует, что каждая локально конечная игра допускает не более одного выигрышно-проигрышного разбиения (ср. с теоремой 2.1.1).

Определение функции игры с точки зрения выбора разумных стратегий в игре Ним обосновывается следующей теоремой.

Теорема 2.3.3. *Если игрок имеет очередь хода в вершине x, то при любой стратегии противника он может*

(a) *выиграть тогда и только тогда, когда* $x \in X_G$,

(b) *избежать поражения тогда, когда* $x \in X_R$. *Этого он достигает с помощью стратегии s, удовлетворяющей условиям*

$$(I(x) = \alpha,\ \alpha \text{ нечетно}) \Rightarrow I(s(x)) = \alpha - 1,$$

$$I(x) = \infty \Rightarrow I(s(x)) = \infty.$$

Доказательство. Из свойств (5) и (7) функции игры следует существование стратегии s, удовлетворяющей указанным условиям. Если $x \in X_G$ и начинающий игрок применяет стратегию s, то при любом выборе стратегии противником он в силу (6) будет ходить только в вершинах из X_G. Далее, для последовательности $x, y, z, \ldots$ всех вершин, в которых он ходит, справедливы неравенства

$$I(x) > I(y) > I(z) > \ldots .$$

Это означает, что соответствующая последовательность порядковых чисел строго монотонно убывает и поэтому конечна. Следовательно, возникающая партия также должна быть конечной и приводить к выигрышу начинающего.

Если $x \in X_R$ и оба игрока используют стратегию s, то возникающая партия не обрывается. Если же ходивший вторым применит какую-либо другую стратегию, то тем самым он может достичь только того, что его противник будет ходить в некоторой вершине из X_G и в соответствии с (a) выиграет. Следовательно, ясно, что начинающий проиграет, если он находится в вершине $x \in X_V$ и его противник применяет стратегию s.

По теореме 2.3.3 функцию игры некоторой игры Ним (X, γ) можно рассматривать как ее решение. Пара стратегий, удовлетворяющих условиям этой теоремы, образует локальную сильную СРВ для каждой позиции (x, i) с $I(x) \neq \infty$ и локальную слабую СРВ для каждой позиции (x, i) с $I(x) = \infty$ независимо от того, как определяется соответствующая (искусственная) окончательная позиция p_0 (ср. определение 1.4.1).

Легко видеть, кроме того, что независимо от того, в какой позиции начинается партия и какую стратегию применяет противник, ни один игрок не может извлечь выгоду из замены стратегии s из теоремы 2.3.3 какой-либо другой стратегией. Поэтому мы можем рассматривать стратегию, удовлетворяющую условиям теоремы 2.3.3, как «оптимальную»,

2.3.3. Произведение игр Ним

Из конечного числа игр Ним (X_t, γ_t) $(t = 1, \ldots, m)$ можно сконструировать новую игру, если предположить, что игрок обязан ходить одновременно во всех играх. Эту игру $(X, \gamma) = \prod_{t=1}^{m} (X_t, \gamma_t)$ будем называть *произведением* игр (X_t, γ_t). Формально она определяется множеством позиций

$$X = X_1 \times \ldots \times X_m$$

и динамикой

$$\gamma(x_1, \ldots, x_m) = \{(y_1, \ldots, y_m) \mid y_t \in \gamma_t x_t, t = 1, \ldots, m\}.$$

Подобно зависимости между функцией Гранди и игрой-суммой, решение игры-произведения можно найти исходя из функций «игр-сомножителей».

Теорема 2.3.4. *Пусть (X_t, γ_t), $t = 1, \ldots, m$, — произвольные игры Ним с функциями игры I_t. Тогда функция игры I для их игры-произведения $(X, \gamma) = \prod_{t=1}^{m} (X_t, \gamma_t)$ в каждой вершине $(x_1, \ldots, x_m)$ удовлетворяет равенству*

$$I(x_1, \ldots, x_m) = \min\{I_1(x_1), \ldots, I_m(x_m)\},$$

поскольку мы считаем, что любое порядковое число $\alpha < \infty$.

Доказательство. В силу теоремы 2.3.2 достаточно показать, что функция

$$\min\{I_1(x_1), \ldots, I_m(x_m)\} \overset{\text{df}}{=} M(x_1, \ldots, x_m)$$

обладает свойствами (4)—(7); см. п. 2.3.2.

Проверим (4). Из $M(x_1, \ldots, x_m) = 0$ следует $I_t(x_t) = 0$ хотя бы для одного t. Так как I_t — функция игры (X_t, γ_t), должно быть $\gamma_t x_t = \varnothing$ и, по определению γ, $\gamma(x_1, \ldots, x_m) = \varnothing$.

Рассмотрим теперь (5). Пусть

$$M(x_1, \ldots, x_m) = I_{t_0}(x_{t_0}) = \alpha,$$

α нечетно и $\beta \in W_g(\alpha - 1)$. Тогда существует такая вершина $y_{t_0} \in \gamma_{t_0} x_{t_0}$, что $I_{t_0}(y_{t_0}) = \alpha - 1$. Такое y_t выберем для всех t, для которых $I_t(x_t) = \alpha$; для тех же t, для которых $I_t(x_t) > \alpha$, найдется такое $y_t \in \gamma_t x_t$, что $I_t(y_t) \geqq \alpha$. Так образованная вершина $(y_1, \ldots, y_m)$ принадлежит $\gamma(x_1, \ldots, x_m)$ и удовлетворяет равенству $M(y_1, \ldots, y_m) = \alpha - 1$. Наконец, ни для какого $(y_1, \ldots, y_m) \in \gamma(x_1, \ldots, x_m)$ не имеет места $M(y_1, \ldots \ldots, y_m) = \beta$, поскольку из $I_t(x_t) \geqq \alpha$ всегда следует

$$\gamma_t x_t \cap I_t^{-1}(\beta) = \varnothing.$$

Для доказательства (6) положим $M(x_1, \ldots, x_m) = I_{t_0}(x_{t_0}) = \alpha$, где α четное и $\alpha' < \alpha$. Тогда

$$\gamma_{t_0} x_{t_0} \subset \bigcup_{\beta \in W_u(\alpha)} I_{t_0}^{-1}(\beta).$$

Для каждого такого t, что $I_t(x_t) > \alpha$, напротив, имеет место

$$\gamma_t x_t \cap \left[\bigcup_{\beta \in W_g(\alpha)} I_t^{-1}(\beta) \right] = \varnothing.$$

Таким образом, для каждой $(y_1, \ldots, y_m) \in \gamma(x_1, \ldots, x_m)$ число $M(y_1, \ldots y_m)$ может быть только нечетным и меньшим α. Так как в случае $I_t(x_t) \geqq \alpha$ должно быть

$$\gamma_t x_t \not\subset \bigcup_{\beta \in W_u(\alpha')} I_t^{-1}(\beta),$$

в множестве $\gamma(x_1, \ldots, x_m)$ найдется такая вершина $(y_1, \ldots \ldots, y_m)$, что

$$M(y_1, \ldots, y_m) \notin W_u(\alpha').$$

Нам осталось проверить (7). Из $M(x_1, \ldots, x_m) = \infty$ следует $I_t(x_t) = \infty$ для всех t и отсюда немедленно справедливость утверждения.

Читатель должен был заметить, что в доказательстве последней теоремы нигде не использовалась конечность числа игр (X_t, γ_t). Если t изменяется в произвольном множестве T, то игру-произведение $\prod_{t \in T} (X_t, \gamma_t)$ можно определить так же, как и выше: игрок, которому принадлежит очередь хода, должен ходить во всех играх (X_t, γ_t), $t \in T$, сразу. Поскольку в каждом множестве порядковых чисел, так же как и в $\{I_t(x_t) \mid t \in T\}$, существует наименьший элемент, мы получаем функцию игры для игры-произведения:

$$I(x_t \mid t \in T) = \min \{I_t(x_t) \mid t \in T\}.$$

§ 2.4. Задачи

1. Рассмотрим следующую игру, предложенную Ласкером [1]: пусть на столе лежат несколько кучек спичек. Тот, кому принадлежит очередь хода, должен либо забрать спички ровно из одной кучки (столько, сколько он хочет), либо одну из кучек разбить произвольным образом на две

непустые кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Показать, что в случае одной кучки с n спичками функция Гранди имеет вид

$$g(n)=\begin{cases} n-1, & \text{если} \quad n>0 \quad \text{и} \quad n\equiv 0 \pmod 4, \\ n+1, & \text{если} \quad n\equiv 3 \pmod 4, \\ n & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

2. Изменим правило выигрыша в игре Фан-Тан так, что проигрывает тот, кто заканчивает партию. Доказать, что вершина $(x_1, \ldots, x_m)$, для которой неравенство $x_t > 1$ выполнено хотя бы для одного t, является проигрышной вершиной в том и только том случае, когда она относится к проигрышным вершинам в первоначальной игре Фан-Тан (этот результат принадлежит Баутону [1]).

3. На примере игры Фан-Тан показать, что функция игры, вообще говоря, не пригодна для решения игр-сумм.

4. Пусть (X_G, X_V) — выигрышно-проигрышное разбиение и l — функция игры для некоторой игры (X, γ). Доказать, что

$$X_V \cap \{x \in X \mid l(x) \text{ нечетно}\} = \varnothing.$$

5. Доказать, что игра Фан-Тан с тремя вазами — когда каждый игрок может брать из одной или из двух ваз — имеет функцию Гранди g, определенную следующей конструкцией. Положим для неотрицательного целого n $\varphi(n) = {}^1\!/_2 n(n+1)$ и поставим в соответствие каждой вершине $x = (x_1, x_2, x_3)$ числа $m(x) = \min\limits_i x_i$ и $d(x) = \sum\limits_{i=1}^{3} (x_i - m(x))$.

Доказать следующее утверждение: в случае $m(x) \leqq \varphi(d(x))$

$$g(x) = x_1 + x_2 + x_3.$$

Если же $m(x) > \varphi(d(x))$, то $g(x)$ определяется двумя условиями:

$$\varphi(d(x)) \leqq g(x) \leqq \varphi(d(x)) + d(x)$$

и

$$g(x) \equiv (m(x) - 1) \pmod{(d(x) + 1)}.$$

(Доказательство можно найти в работе Куммера [1].)

6. Доказать, что в игре Ним (X, γ) глобальная сильная СРВ существует тогда и только тогда, когда функция игры l не принимает значение ∞.

7. Доказать, что в игре Фан-Тан порядка p вершина x является проигрышной в том и только том случае, когда

$$\sum_{\lambda} (p+1)^{\lambda} \left[\sum_{k=1}^{m} d_{\lambda}(x_k) \right]_{(p+1)} = 0.$$

Здесь $[z]_{(p+1)}$ обозначает остаток по модулю $p+1$ (этот результат принадлежит Муру [1]).

8

Антагонистические терминальные игры

Среди всех бескоалиционных игр антагонистические игры занимают особое место по нескольким причинам.

Во-первых, они моделируют простейшие мыслимые формы конфликта, если отказаться от рассмотрения совсем тривиального с теоретико-игровой точки зрения случая совпадения интересов всех участников.

Во-вторых, запрещение кооперирования в антагонистической игре практически ни к чему не приводит, поскольку ни одному из игроков сотрудничество с противником не приносит пользы.

Наконец, в-третьих, эти игры теснейшим образом связаны с вопросами оптимального программирования (теоремы о седловых точках, теория двойственности) и охватывают, в частности, оптимизационные задачи в условиях неопределенности (игры против природы), представляющие одну из важнейших областей приложений теории игр.

Все это, безусловно, относится и к антагонистическим терминальным играм, а, учитывая их простую по сравнению с общими терминальными играми математическую структуру, имеются основания ожидать достаточно сильных утверждений.

Мы покажем, что каждая антагонистическая терминальная игра с дискретным выигрышем имеет глобальную слабую СРВ, являющуюся в некотором смысле «однородной». Далее мы приведем достаточные и (в общем случае) необходимые условия того, что существование локальной сильной СРВ (для каждой позиции) гарантирует существование глобальной сильной СРВ.

С точки зрения исследования антагонистических терминальных игр полезным оказывается изучение определенных функциональных уравнений. Они описывают решение терминальной игры способом, подобным тому, каким функциональные уравнения Беллмана описывают решение задачи динамического программирования (по этому поводу см., например, книгу Пилера [1]).

Для упрощения обозначений будем рассматривать антагонистическую терминальную игру Γ в виде тройки (P, γ, H), где P — множество позиций, γ — динамика игры, а H: $P_0 \to R^1$ — функция выигрыша первого игрока. Для расширенных функций выигрыша h_i^- и h_i^+, введенных в § 1.3, в антагонистическом случае справедливы равенства

(1) $\qquad h_1^-(p, s) = -h_2^+(p, s),$

(2) $\qquad h_1^+(p, s) = -h_2^-(p, s).$

Мы положим сокращенно $h^-(p, s) = h_1^-(p, s)$ и $h^+(p, s) = h_1^+(p, s)$ для любой позиции p и любой стратегии s. Таким образом,

$$h^-(p, s) = \begin{cases} -\infty, & \text{если } p \notin D(s), \\ H(p_0(p, s)), & \text{если } p \in D(s); \end{cases}$$

$$h^+(p, s) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } p \notin D(s), \\ h^-(p, s), & \text{если } p \in D(s), \end{cases}$$

причем $p_0(p, s)$ и $D(s)$ были определены в § 1.3.

Далее мы видим, что в соответствии с определением 1.4.1 ситуация $\bar{s}$ является локальной слабой СРВ для позиции p тогда и только тогда, когда существует такая позиция $p_0 \in P_0$, что

(D 1) $\qquad \sup\limits_{s_1} h^-(p, s_1, \bar{s}_2) \leqq H(p_0) \leqq \inf\limits_{s_2} h^+(p, \bar{s}_1, s_2).$

Здесь супремум и инфимум берутся по всем стратегиям s_1 игрока 1 и соответственно по всем стратегиям s_2 игрока 2.

Ситуация $\bar{s}$ является локальной сильной СРВ для позиции p тогда и только тогда, когда

(D 2) $\qquad \sup\limits_{s_1} h^+(p, s_1, \bar{s}_2) \leqq \inf\limits_{s_2} h^-(p, \bar{s}_1, s_2).$

Таким образом, для того чтобы ситуация $\bar{s}$ была локальной слабой СРВ для позиции p, значение $\inf\limits_{s_2} h^+(p, \bar{s}_1, s_2)$ должно быть достаточно большим. В то же время значение $\inf\limits_{s_2} h^-(p, \bar{s}_1, s_2)$, рассматриваемое как функция s_1, должно быть в локальной сильной СРВ $\bar{s}$ для позиции p просто максимальным, поскольку (D 2) может выполняться только как равенство.

Будем называть стратегию $\bar{s}_1$ (игрока 1), обладающую свойством

(D 3) $\qquad \inf\limits_{s_2} h^+(p, \bar{s}_1, s_2) = \sup\limits_{s_1} \inf\limits_{s_2} h^+(p, s_1, s_2),$

локально h^+-оптимальной для позиции p. Если (D 3) выполняется для всех позиций p, то $\bar{s}_1$ называется *глобально h^+-оптимальной.* Аналогично определяются *локально* и *глобально h^--оптимальные* стратегии; при этом в (D 3) h^+ заменяется на h^-.

Очевидно, что игрок 1 тогда заинтересован в большом h^+-выигрыше, когда он свою основную цель видит в осуществлении бесконечной партии и только во вторую очередь в возможно лучшем исходе (в смысле H) конечной партии. Это, в частности, имеет место, если Γ является игрой против природы (игрок 2) и окончание партии означает более или менее опасную аварию (чем меньше $H(p)$, тем серьезнее последствия). Если, однако, достижение окончательной позиции соответствует более или менее удачному исполнению замысла, который игрок 1 намерен осуществить, то он будет стремиться к большому h^--выигрышу (ср. пример 1.2.4).

§ 3.1. Решения и функции значения

В § 1.4 мы ввели два принципиально различных понятия ситуаций равновесия; здесь же мы рассмотрим дополнительно понятия h^+- и h^--оптимальных стратегий. В этом смысле название параграфа не совсем точно отражает суть дела. Мы используем термин «решение» как родовой для всех этих понятий решений и убедимся в том, что определяемые далее функции значения задают связи между ними.

В частности, мы покажем следующее.

1. Каждая антагонистическая терминальная игра имеет максимальную и минимальную функции значения, которые в локально конечном случае совпадают.

2. Каждая функция значения дает оценки нижней ε-границы гарантированного h^+-выигрыша игрока 1.

3. Минимальная функция значения дает оценки нижней ε-границы гарантированного h^--выигрыша игрока 1.

4. Как для $h = h^+$, так и для $h = h^-$ имеет место равенство

$$\sup_{s_1} \inf_{s_2} h(p, s_1, s_2) = \inf_{s_2} \sup_{s_1} h(p, s_1, s_2) \quad \forall p \in P.$$

5. Для существования глобальной слабой СРВ достаточно (а в локально конечном случае и необходимо) существование некоторой функции значения, обладающей специальными свойствами.

Будем через $H(P_0)$ обозначать множество $\{H(p) \mid p \in P_0\}$, а через $\overline{H(P_0)}$ — его замыкание.

Определение 3.1.1. Отображение

$$v\colon\ P \to \overline{H(P_0)} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

называется *функцией значения* игры $\Gamma = (P, \gamma, H)$, если

(D 4) $v(p) = H(p) \qquad \forall p \in P_0$;

(D 5) $v(p) = \sup\limits_{p' \in \gamma p} v(p') \qquad \forall p \in P_1$;

(D 6) $v(p) = \inf\limits_{p' \in \gamma p} v(p') \qquad \forall p \in P_2$.

Определение 3.1.2. Функция значения v игры Γ называется *максимальной* (*минимальной*), если для каждой функции значения v' игры Γ и каждой позиции $p \in P$ справедливо неравенство

$$v(p) \geqq v'(p) \quad (v(p) \leqq v'(p)).$$

При исследовании игр Ним мы уже имели дело с функциями значения, хотя они и не были определены в таком виде. А именно, если (X_G, X_V) — выигрышно-проигрышное разбиение игры Ним (X, γ), то мы приходим к функции игры, положив

$$v(x,\ 1) = +1 \quad \forall x \in X_G, \qquad v(x,\ 1) = -1 \quad \forall x \in X_V,$$
$$v(x,\ 2) = -1 \quad \forall x \in X_G, \qquad v(x,\ 2) = +1 \quad \forall x \in X_V,$$

и обратно: если v — функция значения, обладающая свойством $v(x, 1) = -v(x, 2) \in \{-1, +1\}$, то она определяет выигрышно-проигрышное разбиение $X_G = \{x \mid v(x, 1) = 1\}$ и $X_V = X \setminus X_G$. Поскольку игра Ним (не локально конечная) может иметь несколько таких разбиений, в общем случае для антагонистической терминальной игры может иметься несколько функций значения (если существует хотя бы одна).

Теорема 3.1.1. *Пусть v — функция значения антагонистической терминальной игры Γ. Тогда для любого положительного ε существует такая стратегия $\bar{s}_1$ игрока* 1, *что*

$$\inf_{s_2} h^+(p,\ \bar{s}_1,\ s_2) \geqq v(p) - \varepsilon \quad \forall p \in P.\ ^{1})$$

Доказательство. Разобьем множество P_1 на попарно непересекающиеся множества Q_k ($k = 0, +1, -1, +2, -2, \ldots$

¹) Здесь инфимум берется по всем стратегиям игрока 2 и принимается, что $+\infty - \varepsilon = 1/\varepsilon$; $-\infty - \varepsilon = -\infty$.

$\ldots, +\infty, -\infty)$ вида

$$Q_\infty = \{p \in P_1 \mid v(p) = \infty\}, \quad Q_{-\infty} = \{p \in P_1 \mid v(p) = -\infty\},$$
$$Q_k = \{p \in P_1 \mid k\varepsilon \geqq v(p) > (k-1)\varepsilon\}, \qquad k \neq -\infty, +\infty.$$

Таким образом, каждая позиция $p \in P_1$ принадлежит ровно одному множеству Q_k, и в соответствии с (D 5) существует такая стратегия $\bar{s}_1$, что

$$p \in Q_\infty \Rightarrow v(\bar{s}_1(p)) > 1/\varepsilon + \varepsilon,$$
$$p \in Q_k \Rightarrow \bar{s}_1(p) \in Q_k, \qquad k \neq +\infty.$$

В силу (D 6) для каждой стратегии s_2 игрока 2 и каждой позиции p из P_2 должно быть

$$v(p) \leqq v(s_2(p)).$$

Следовательно, для $p' \in P(p, \bar{s}_1, s_2)$ и $p \in P$ мы имеем

$$v(p') > (k-1)\varepsilon, \quad \text{если} \quad k \cdot \varepsilon \geqq v(p) > (k-1)\varepsilon,$$
$$v(p') > 1/\varepsilon, \qquad \text{если} \quad v(p) = \infty.$$

В частности, эти неравенства справедливы и для окончательной позиции p' из $P(p, \bar{s}_1, s_2)$ — если она существует, — и из (D 4) мы получаем требуемое утверждение.

Теорема 3.1.2. *Пусть антагонистическая терминальная игра Γ имеет функцию значения v, удовлетворяющую условию*

$$(3) \qquad v(p) = \max_{p' \in \gamma p} v(p') \quad \forall p \in P_1.$$

Тогда стратегия $\bar{s}_1$, для которой

$$(4) \qquad v(\bar{s}_1(p)) = v(p) \quad \forall p \in P_1,$$

обеспечивает выполнение неравенства

$$\inf_{s_2} h^+(p, \bar{s}_1, s_2) \geqq v(p) \quad \forall p \in P.$$

Доказательство. Действительно, аналогично доказательству теоремы 3.1.1, утверждение немедленно следует из неравенства $v(p') \geqq v(p)$ $\forall p \in P$, $\forall p' \in P(p, \bar{s}_1, s_2)$.

Согласно утверждениям теорем 3.1.1 и 3.1.2, для любой функции значения v игрок 1 имеет стратегию, которая в каждой партии обеспечивает ему в качестве h^+-выигрыша значение $v(p)$ (или почти это значение), соответствующее начальной позиции p. Доказательство теоремы 3.1.1 конструктивно и показывает, как строить такую стратегию. В теореме 3.1.2 эта стратегия задана.

Таким образом, вопрос о существовании функции значения становится осмысленным.

Теорема 3.1.3. *Каждая антагонистическая терминальная игра имеет максимальную функцию значения v^+ и минимальную функцию значения v^-, которые задаются формулами*

$$v^+(p) = \sup_{s_1} \inf_{s_2} h^+(p, s_1, s_2) \quad \forall p \in P,$$

$$v^-(p) = \inf_{s_2} \sup_{s_1} h^-(p, s_1, s_2) \quad \forall p \in P.$$

Доказательство. Покажем, что указанная функция v^+ является максимальной функцией значения. Соответствующее утверждение относительно функции v^- получается аналогичным образом с учетом симметрии в определениях функций v^+ и v^-.

Прежде всего докажем, что v^+ является функцией значения.

Проверим (D 4). Выполнение равенства $v^+(p) = H(p)$ $\forall p \in P_0$, очевидно, следует из определения функции h^+.

Докажем (D 5), т.е. что $v^+(p) = \sup_{p' \in \gamma p} v^+(p')$ $\forall p \in P_1$. Имеет место

$$v^+(p) = \sup_{s_1} \inf_{s_2} h^+(p, s_1, s_2) = \sup_{s_1} \inf_{s_2} h^+(s_1(p), s_1, s_2) \leqq$$
$$\leqq \sup_{p' \in \gamma p} \sup_{s_1} \inf_{s_2} h^+(p', s_1, s_2) = \sup_{p' \in \gamma p} v^+(p').$$

Таким образом, должно быть

$$v^+(p) \leqq \sup_{p' \in \gamma p} v^+(p').$$

Предположим, что для некоторой позиции $p \in P_1$ будет

$$v^+(p) < \sup_{p' \in \gamma p} v^+(p').$$

Тогда существуют такая позиция $p' \in \gamma p$ и такая стратегия s_1, что

$$v^+(p) < \inf_{s_2} h^+(p', s_1, s_2).$$

Построим $\bar{s}_1$ по правилу

$$\bar{s}_1(q) = \begin{cases} s_1(q), & \text{если } q \neq p, \quad q \in P_1, \\ p', & \text{если } q = p. \end{cases}$$

Тогда для каждой стратегии s_2

$$h^+(p, \bar{s}_1, s_2) = \begin{cases} h^+(p', s_1, s_2), & \text{если } p \notin P(p', \bar{s}_1, s_2), \\ +\infty & \text{если } p \in P(p', \bar{s}_1, s_2), \end{cases}$$

и поэтому

$$\inf_{s_2} h^+(p, \bar{s}_1, s_2) \geqq \inf_{s_2} h^+(p', s_1, s_2) > v^+(p),$$

что противоречит определению $v^+(p)$. Таким образом, (D 5) выполнено.

Проверим (D 6): $v^+(p) = \inf\limits_{p' \in \gamma p} v^+(p')$ $\forall p \in P_2$. Пусть сначала s_1 — произвольная фиксированная стратегия игрока 1 и $p \in P_2$; тогда

$$\inf_{s_2} h^+(p, s_1, s_2) = \inf_{s_2} h^+(s_2(p), s_1, s_2) \geqq \inf_{p' \in \gamma p} \inf_{s_2} h^+(p', s_1, s_2).$$

Покажем, что в этом неравенстве имеет место точное равенство. Для этого по $p' \in \gamma p$ и $s_2 \in S_2$ построим стратегию $\bar{s}_2 (= \bar{s}_2(p', s_2))$ следующим образом:

$$\text{если } p \in P(p', s_1, s_2), \text{ то } \bar{s}_2(q) = s_2(q) \quad \forall q \in P_2;$$

$$\text{если } p \notin P(p', s_1, s_2), \text{ то } \bar{s}_2(q) = \begin{cases} s_2(q) & \forall q \in P_2, q \neq p, \\ p' & q = p. \end{cases}$$

Тогда в каждом случае

$$h^+(p', s_1, s_2) = h^+(p, s_1, \bar{s}_2),$$

и, следовательно, для $p \in P_2$ и $s_1 \in S_1$ будет

$$\inf_{s_2} h^+(p, s_1, s_2) = \inf_{p' \in \gamma p} \inf_{s_2} h^+(p', s_1, s_2).$$

Таким образом, мы получаем

$$v^+(p) = \sup_{s_1} \inf_{p' \in \gamma p} (\inf_{s_2} h^+(p', s_1, s_2)) \leqq \inf_{p' \in \gamma p} \sup_{s_1} (\inf_{s_2} h^+(p', s_1, s_2)) =$$

$$= \inf_{p' \in \gamma p} \sup_{s_1} \inf_{s_2} h^+(p', s_1, s_2) = \inf_{p' \in \gamma p} v^+(p').$$

Предположим, что для некоторой позиции $\bar{p} \in P_2$

$$v^+(\bar{p}) < \inf_{p' \in \gamma \bar{p}} v^+(p').$$

Выберем такое c, что

$$v^+(\bar{p}) < c < \inf_{p' \in \gamma p} v^+(p').$$

Согласно (D 5), существует такая стратегия $\bar{s}_1$, что

$$v^+(\bar{s}_1(q)) > c \quad \forall q \in P_1, \ v^+(q) > c.$$

Так как из $q \in P_2$ и $s_2 \in S_2$ следует, что $v^+(s_2(q)) \geqq v^+(q)$, мы получаем для произвольных $s_2 \in S_2$ и $p' \in P(\bar{p}, \bar{s}_1, s_2)$ неравенство

$$v^+(p') > c.$$

Это означает что $\inf\limits_{s_2} h^+(\bar{p}, \bar{s}_1, s_2) \geqq c > v^+(\bar{p})$, а это противоречит определению $v^+(\bar{p})$. Следовательно, (D 6) действительно имеет место.

Нам осталось показать, что $v(p) \leqq v^+(p)$ для каждой позиции p и каждой функции значения v. Если v — функция значения и p — такая позиция, что $v(p) > v^+(p)$, то выберем c из открытого интервала $(v^+(p), v(p))$ и зафиксируем такую стратегию $\bar{s}_1$, что

$$v(\bar{s}_1(q)) > c \quad \forall q \in P_1,\ v(q) > c.$$

Тогда, как уже было показано, мы приходим к противоречию:

$$\inf_{s_2} h^+(p, \bar{s}_1, s_2) \geqq c > v^+(p).$$

Этим теорема доказана.

Рассмотрим теперь зависимость между функциями значения и ситуациями равновесия.

Теорема 3.1.4. *Пусть v — функция значения антагонистической терминальной игры Γ, а $\bar{s}$ — ситуация в этой игре, обладающая свойством*

$$v(\bar{s}(p)) = v(p) \quad \forall p \in P_1 \cup P_2. \tag{5}$$

Тогда $\bar{s}$ является локальной слабой СРВ для каждой позиции p, удовлетворяющей условию $v(p) \in H(P_0)$.

Доказательство. По теореме 3.1.2 для любой стратегии s_2 будет

$$h^+(p, \bar{s}_1, s_2) \geqq v(p).$$

Аналогично для любой стратегии s_1

$$v(p) \geqq h^-(p, s_1, \bar{s}_2).$$

Если мы в случае $p \notin D(\bar{s})$ поставим в соответствие ситуации $\bar{s}$ такую окончательную позицию p_0, что $H(p_0) = v(p)$, то из этих двух неравенств получится требуемое утверждение.

Теорема 3.1.5. *Пусть p — позиция в антагонистической терминальной игре* Γ, *для которой существует локальная сильная СРВ* $\bar{s}$.

Тогда для любой функции значения v игры Γ

$$h^-(p,\ \bar{s}) = v(p') = h^+(p,\ \bar{s}) \quad \forall p' \in P(p,\ \bar{s}_1,\ \bar{s}_2).$$

Доказательство. По предположению

$$v^+(p) \leqq \sup_{s_1} h^+(p,\ s_1,\ \bar{s}_2) \leqq \inf_{s_2} h^-(p,\ \bar{s}_1,\ s_2) \leqq v^-(p).$$

Согласно теореме 3.1.3, имеет место также неравенство $v^-(p) \leqq v^+(p)$. Следовательно, для любой функции значения v должно выполняться равенство

$$v(p) = h^+(p,\ \bar{s}_1,\ \bar{s}_2) = h^-(p,\ \bar{s}_1,\ \bar{s}_2).$$

Пусть теперь

$$P^* = \{p' \in P(p,\ \bar{s}) \mid v(p') \neq v(p)\}.$$

Если $P^* = \varnothing$, то утверждение теоремы верно. В противном случае из последовательности $F(p, \bar{s})$ текущих позиций (если игроки создают ситуацию $\bar{s}$ и партия начинается в позиции p) выберем первую из числа принадлежащих P^* и обозначим ее через $\bar{p}$.

Если $v(\bar{p}) > v(p)$ и $v(\bar{p}) > c > v(p)$ для некоторой функции значения v, то игрок 1, применяя стратегию

$$s_1(q) = \begin{cases} q', \text{ где } v(q') > c,\ q' \in \gamma q, & \text{если } v(q) > c, \\ \bar{s}_1(q), & \text{если } v(q) \leqq c, \end{cases}$$

может добиться того, чтобы было

$$h^+(p,\ s_1,\ \bar{s}_2) = h^+(\bar{p},\ s_1,\ \bar{s}_2) \geqq c > v(p).$$

Но тогда $\bar{s}$ не может быть локальной сильной СРВ для позиции p.

Если же $v(\bar{p}) < c < v(p)$, то, рассматривая стратегию

$$s_2(q) = \begin{cases} q', \text{ где } v(q') < c,\ q' \in \gamma q, & \text{если } v(q) < c, \\ \bar{s}_2(q), & \text{если } v(q) \geqq c, \end{cases}$$

мы приходим к противоречию. Таким образом, множество P^* должно быть пустым.

Из двух последних теорем вытекает следующее утверждение.

Теорема 3.1.6. *Любая локально конечная антагонистическая терминальная игра имеет ровно одну функцию значения v. Она обладает глобальной СРВ тогда и только тогда,* *когда супремум в* (D 5) *и соответственно инфимум в* (D 6) *рассматриваются для каждой позиции* $p \in P_1 \cup P_2$. *Ситуация* $\bar{s}$ *в этой игре является глобальной СРВ в том и только том случае, когда*

$$v(s(p)) = v(p) \quad \forall p \in P_1 \cup P_2.$$

Доказательство. В локально конечной игре $h^- = h^+ (= h)$. Из

$$v^+(p) = \sup_{s_1} \inf_{s_2} h(p, s_1, s_2) \leqq \inf_{s_2} \sup_{s_1} h(p, s_1, s_2) = v^-(p)$$

следует единственность функции значения. Поскольку, кроме того, сильные и слабые СРВ в локально конечной игре совпадают, остальные утверждения следуют из теорем 3.1.4 и 3.1.5.

Следующий результат является (несколько более слабым) аналогом теоремы 3.1.1 относительно функции выигрыша h^-. Однако для доказательства нам потребуется более сильное логическое средство — трансфинитная индукция, — так как придется исключать бесконечные партии.

Теорема 3.1.7. *Пусть* c — *произвольное вещественное число,* $\varepsilon > 0$ *и*

$$P^c = \{p \in P \mid v^-(p) \geqq c\}.$$

Тогда существует такая стратегия $\bar{s}_1$, *что*

$$\inf_{s_2} h^-(p, \bar{s}_1, s_2) \geqq c - \varepsilon \quad \forall p \in P^c.$$

Доказательство. Рассмотрим следующие отображения A_1 и A_2 множества 2^P в себя:

$$A_1 Q = \{p \in P_1 \setminus Q \mid \gamma p \cap Q \neq \varnothing\},$$
$$A_2 Q = \{p \in P_2 \setminus Q \mid \gamma p \subset Q\}.$$

С помощью этих отображений индуктивно поставим в соответствие каждому порядковому числу α некоторое подмножество Q_α множества P:

(D 7) $Q_0 = \{p \in P_0 \mid H(p) \geqq c - \varepsilon\}$;

(D 8) если $\alpha > 0$ и не является предельным числом, то

$$Q_\alpha = Q_{\alpha-1} \cup A_1 Q_{\alpha-1} \cup A_2 Q_{\alpha-1};$$

(D 9) если $\alpha > 0$ — предельное число, то

$$Q_\alpha = \Big(\bigcup_{\beta<\alpha} Q_\beta\Big) \cup A_2 \Big(\bigcup_{\beta<\alpha} Q_\beta\Big).$$

Так определенные множества Q_α, очевидно, обладают следующими свойствами:

$$\bigcup_{\beta<\alpha} Q_\beta \subset Q_\alpha,$$

$$Q_\alpha = Q_{\alpha+1} \Rightarrow Q_\alpha = Q_\beta \quad \forall\beta > \alpha.$$

Тем самым указывается порядковое число α_0, для которого $Q_{\alpha_0} = Q_{\alpha_0+1}$ (см. по этому поводу § П. 3 приложения).

Положим теперь $Q = Q_{\alpha_0}$. Поскольку $A_1Q = A_2Q = \varnothing$, мы получаем

(6) $\qquad \gamma p \cap Q = \varnothing \qquad \forall p \in P_1 \setminus Q,$

(7) $\qquad \gamma p \cap (P \setminus Q) \neq \varnothing \quad \forall p \in P_2 \setminus Q.$

Пусть $\alpha(p)$ для каждой позиции $p \in Q$ обозначает наименьшее из всех таких порядковых чисел α, что $p \in Q_\alpha$. Если $p \in P_1 \cap Q$, то в силу (D 9) порядковое число $\alpha(p)$ не может быть предельным, и из (D 8) следует

(8) $\qquad \gamma p \cap Q_{\alpha(p)-1} \neq \varnothing \quad \forall p \in P_1 \cap Q.$

Для $p \in P_2 \cap Q$ из (D 8) и (D 9) следует, напротив, что

(9) $\qquad \gamma p \subset \bigcup_{\beta<\alpha(p)} Q_\beta \quad \forall p \in P_2 \cap Q.$

В соответствии с (8) и (7) существуют такие стратегии $\bar{s}_1$ и $\bar{s}_2$, что

$$p \in P_1 \cap Q \Rightarrow \bar{s}_1(p) \in Q_{\alpha(p)-1},$$

$$p \in P_2 \setminus Q \Rightarrow \bar{s}_2(p) \in P \setminus Q.$$

Для того чтобы доказать, что $P^c \subset Q$, рассмотрим произвольную позицию $p \in P \setminus Q$ и покажем, что $p \notin P^c$.

Для любой стратегии s_1 из (6) следует $P(p, s_1, \bar{s}_2) \cap Q = \varnothing$. Так как $Q_0 \subset Q$, должно быть $P(p, s_1, \bar{s}_2) \cap Q_0 = \varnothing$, откуда $h^-(p, s_1, \bar{s}_2) < c - \varepsilon$. Таким образом,

$$v^-(p) \leqq \sup_{s_1} h^-(p, s_1, \bar{s}_2) \leqq c - \varepsilon < c,$$

т. е. $p \notin P^c$.

Пусть теперь $p \in Q$. Зафиксируем произвольную стратегию s_2. Тогда в силу (9)

$$P(p, \bar{s}_1, s_2) \subset Q.$$

Множество $\{\alpha(p') \mid p' \in P(p, \bar{s}_1, s_2)\}$ имеет наименьший элемент. Пусть это будет $\alpha(\bar{p})$. Если $\bar{p} \in P_1 \setminus P_0$, то $\alpha(\bar{s}_1(\bar{p})) < \alpha(\bar{p})$. Если $\bar{p} \in P_2 \setminus P_0$, то в силу (9) будет

$$\alpha(s_2(\bar{p})) < \alpha(\bar{p}).$$

Поскольку как то, так и другое противоречит выбору $\bar{p}$, возможно только включение $\bar{p} \in P_0$. Таким образом, $P(p, \bar{s}_1, s_2) \cap \cap Q_0 \neq \varnothing$ и $h^-(p, \bar{s}_1, s_2) \geqq c - \varepsilon$. Следовательно, мы получаем

$$\inf_{s_2} h^-(p, \bar{s}_1, \bar{s}_2) \geqq c - \varepsilon \quad \forall p \in Q,$$

что вместе с $P^c \subset Q$ доказывает утверждение.

Читатель, несомненно, обратил внимание на то, что теорема 3.1.7, равно как и теоремы 3.1.1 и 3.1.2, сформулированные, так сказать, с точки зрения первого игрока, соответствующим образом переносятся и на второго игрока. Так, например, справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1.7′. *Пусть c — произвольное вещественное число и $\varepsilon > 0$. Тогда существует такая стратегия $\bar{s}_2$, что*

$$\sup_{s_1} h^+(p, s_1, \bar{s}_2) \leqq c + \varepsilon, \quad \text{если} \quad v^+(p) \leqq c.$$

Не составляет труда доказать эту теорему аналогично теореме 3.1.7. В качестве важного следствия из теорем 3.1.7 и 3.1.7′ получаем, что любая антагонистическая терминальная игра имеет значение относительно функций выигрыша h^+ и h^-.

Теорема 3.1.8. *Для любой позиции p в антагонистической терминальной игре имеют место равенства*

$$\sup_{s_1} \inf_{s_2} h^-(p, s_1, s_2) = \inf_{s_2} \sup_{s_1} h^-(p, s_1, s_2)$$

и

$$\sup_{s_1} \inf_{s_2} h^+(p, s_1, s_2) = \inf_{s_2} \sup_{s_1} h^+(p, s_1, s_2).$$

Доказательство. Мы докажем только первое равенство. Из

$$v^-(p) = \inf_{s_2} \sup_{s_1} h^-(p, s_1, s_2) = -\infty$$

непосредственно следует равенство

$$\sup_{s_1} \inf_{s_2} h^-(p, s_1, s_2) = -\infty.$$

Если $v^-(p) > c > -\infty$, то из теоремы 3.1.7 следует неравенство

$$\sup_{s_1} \inf_{s_2} h^-(p, s_1, s_2) \geqq c,$$

а тем самым и доказываемое утверждение.

§ 3.2. Существование и свойства решений

Вопрос о существовании решений в том или ином смысле является одним из основных вопросов теории игр. Для ответа на этот вопрос в рамках антагонистических терминальных игр мы можем использовать функции значения, рассмотренные в § 3.1. Кроме того, эти функции оказываются удобным аппаратом исследования тех или иных свойств различных решений. Это проявлялось уже в теореме 3.1.6, в которой доказывалось существование глобальных СРВ в локально конечной антагонистической терминальной игре.

Теорема 3.2.1. *Пусть антагонистическая терминальная игра* Γ *обладает функцией значения* v *со свойствами*

(1) $$v(p) \in H(P_0) \qquad \forall p \in P,$$

(2) $$v(p) = \max_{p' \in \gamma p} v(p') \quad \forall p \in P_1,$$

(3) $$v(p) = \min_{p' \in \gamma p} v(p') \quad \forall p \in P_2.$$

Тогда в игре Γ *существуют глобальная слабая СРВ* $\bar{s}$ *и такая соответствующая функция равновесия* f, *что*

(4) $$f(p) = f(\bar{s}(p)) \quad \forall p \in P \setminus P_0.$$

Доказательство. В силу (2) и (3) существует ситуация $\bar{s}$, для которой

$$v(\bar{s}(p)) = v(p) \quad \forall p \in P \setminus P_0.$$

По теореме 3.1.4 $\bar{s}$ является локальной слабой СРВ для любой позиции. Мы получим соответствующую ситуации $\bar{s}$ функцию равновесия f, обладающую свойством (4), если для каждого числа $t \in H(P_0)$ введем множество уровня

$$P(t) = \{p \in P \mid v(p) = t\},$$

поставим в соответствие каждому t некоторый элемент $p_t \in P_0$, для которого $H(p_t) = t$, и положим

$$f(p) = p_t \quad \forall p \in P(t) \setminus D(\bar{s}).$$

Теорема 3.2.2. *Любая антагонистическая терминальная игра* Γ *с дискретными выигрышами имеет глобальную слабую СРВ и соответствующую функцию равновесия* f, *которые удовлетворяют условию* (4).

Доказательство. По теореме 3.1.3 игра Γ обладает функцией значения, которую мы обозначим, например, через

v^+. Так как множество $H(P_0)$ конечно, должно быть

$$v^+(p) \in H(P_0) \cup \{+\infty\}.$$

Пусть c — максимальный элемент в $H(P_0)$. Положим

$$v(p) = \begin{cases} v^+(p), & \text{если} \quad v^+(p) \neq \infty, \\ c, & \text{если} \quad v^+(p) = \infty. \end{cases}$$

Легко видеть, что v также является функцией значения для Г. Она удовлетворяет (1), а в силу конечности множества $H(P_0)$ и остальным условиям теоремы 3.2.1; значит, утверждение справедливо.

Из теоремы 3.2.2 таким же образом, как из теоремы 3.1.6, выводится существование глобальной сильной СРВ в локально конечной антагонистической терминальной игре с дискретными выигрышами. Этот результат известен в литературе (Берж [1]) и доказывается с помощью трансфинитной индукции для локально конечной игры n лиц с полной информацией и дискретными выигрышами. Однако для рассматриваемого здесь частного случая мы получим его, не используя трансфинитной индукции.

Свойство (4) означает своего рода *однородность* СРВ s и ее функции равновесия f: двум бесконечным партиям, возникающим в том случае, если сложилась ситуация s, ставится в соответствие одна и та же окончательная позиция, поскольку у этих партий есть хотя бы одна общая позиция.

В том, что не каждая глобальная слабая СРВ $\bar{s}$ обладает такой функцией равновесия f, можно убедиться на следующем примере.

Пример 3.2.1. Пусть в вершинах графа, изображенного на рис. 5, ход делают указанные при этих вершинах игроки. Пусть $H(p_{0,0}) = 0$, $H(p_{0,1}) = 1$. Соответствующая антагонистическая терминальная игра не является локально конечной и имеет дискретный выигрыш.

Пусть $\bar{s}$ — следующая ситуация:

$$\bar{s}(p_1) = \bar{s}(p_2) = p'_1, \quad \bar{s}(p'_1) = p'_1.$$

Она характеризуется тем, что ни один из игроков не переводит игру в окончательную позицию. Ситуация $\bar{s}$ является глобальной слабой СРВ. Отображение f: $P \to \{p_{0,0}, p_{0,1}\}$ является функцией равновесия тогда и только тогда, когда

$$f(p_{0,0}) = p_{0,0}, \quad f(p_{0,1}) = p_{0,1}, \quad f(p_1) = p_{0,1}, \quad f(p_2) = p_{0,0}.$$

Так как $p_1' = \bar{s}(p_1) = \bar{s}(p_2)$, должно быть либо $f(p_1) \neq f(p_1')$, либо $f(p_2) \neq f(p_1')$ в зависимости от определения $f(p_1')$. Таким образом, свойство (4) в этом примере нарушается для любой функции равновесия, соответствующей $\bar{s}$.

Заметим далее, что предположение теоремы 3.2.1 выполняется не только для игр с дискретными выигрышами. Так, из конечности всех множеств γp $(p \in P \setminus P_0)$ следует существование функции значения v со свойствами (1)—(3), если

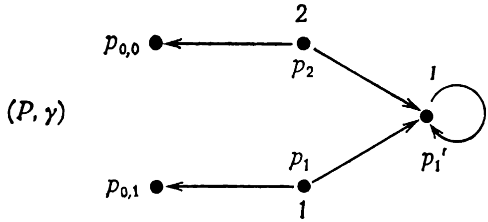

Рис. 5.

только множество $H(P_0)$ непусто, ограничено и замкнуто. Доказательство можно провести так же, как доказательство теоремы 3.2.2.

По сравнению с локальной сильной СРВ локальная слабая СРВ представляет вообще говоря, устойчивость в меньшей мере. Так, допускается, что ситуация $\bar{s}$ при надлежащей начальной позиции p приводит к бесконечной партии, хотя для таких партий выигрыш априори не определен и поэтому их нельзя сравнивать с конечными партиями. Кроме того, в этом случае соответствующая окончательная позиция $p_0(p)$ может не определяться однозначно, так как может быть

$$\sup_{s_1} h^-(p, s_1, \bar{s}_2) < \inf_{s_2} h^+(p, \bar{s}_1, s_2),$$

и условию

$$\sup_{s_1} h^-(p, s_1, \bar{s}_2) \leqq H(p_0) \leqq \inf_{s_2} h^+(p, \bar{s}_1, s_2)$$

могут удовлетворять несколько окончательных позиций p_0. Однозначность гарантируется, если $\bar{s}$ порождает конечную партию с начальной позицией p. Тогда

$$H(p_0) = h^-(p, \bar{s}) = h^+(p, \bar{s}).$$

В антагонистической терминальной игре с дискретными выигрышами существует глобальная слабая СРВ $\bar{s}$, удовлетворяющая условию $p \in D(\bar{s})$ для любой такой позиции p, что $v^-(p) \neq -\infty$. Это является элементарным следствием следующей теоремы.

Теорема 3.2.3. *Пусть* Γ — *антагонистическая терминальная игра, обладающая тем свойством, что множество* $C = \{v^-(p) \mid p \in P,\ v^-(p) \neq -\infty\}$ *вполне упорядочено относительно обычного отношения больше-меньше вещественных чисел* (каждое непустое подмножество множества C имеет наибольший элемент). *Тогда существует глобально* h^-*-оптимальная стратегия* $\bar{s}_1$ *игрока* 1. *Если, кроме того,*

$$v^-(p) = \min_{p' \in \gamma p} v^-(p') \quad \forall p \in P_2, \tag{5}$$

а множество $H(P_0)$ *имеет наименьший элемент, то существуют глобальная слабая СРВ* $\bar{s}$ *и соответствующая функция равновесия* $\mathfrak{f}$, *удовлетворяющая условию* (4), *причем*

$$p \in D(\bar{s}) \quad \forall p \in P,\ v^-(p) \neq -\infty. \tag{6}$$

Доказательство. Прежде всего покажем, что существует глобально h^--оптимальная стратегия. Пусть $c \in C$. Множество $M(c) = \{c' \in C \mid c' < c\}$, если только оно непусто, по предположению обладает максимальным элементом, который мы обозначим через $m(c)$. Если $M(c) = \varnothing$, то положим $m(c) = -\infty$. Далее, пусть

$$P_1^c = \{p \in P_1 \mid v^-(p) = c\}.$$

Зафиксируем произвольно c и выберем ε так, что $0 < \varepsilon < c - m(c)$. По теореме 3.1.7 существует такая стратегия s_1^c игрока 1, что

$$\inf_{s_2} h^-(p,\ s_1^c,\ s_2) \geqq c - \varepsilon \tag{7}$$

для любой позиции p с $v^-(p) \geqq c$, Следовательно,

$$v^-(s_1^c(p)) = v^-(p) \quad \forall p \in P_1^c. \tag{8}$$

Если бы для некоторой позиции $p \in P_1^c$ в действительности выполнялось неравенство

$$v^-(s_1^c(p)) < v^-(p),$$

то мы получили бы, что

$$\inf_{s_2} h^-(p,\ s_1^c,\ s_2) = \inf_{s_2} h^-(s_1^c(p),\ s_1^c,\ s_2) \leqq v^-(s_1^c(p)) < m(c) < c - \varepsilon,$$

а это противоречит (7).

Будем теперь изменять c и построим стратегию $\bar{s}_1$, положив

$$\bar{s}_1(p)=\begin{cases} s_1^c(p), & \text{если } p\in P_1^c, \\ \text{произвольный элемент из } \gamma p, & \text{если } p\in P_1, \\ & v^-(p)=-\infty. \end{cases}$$

Тогда из (8) мы получаем

(9) $$v^-(\bar{s}_1(p))=v^-(p) \quad \forall p\in P_2.$$

Теперь мы можем оценить выигрыш $h^-(p, \bar{s}_1, s_2)$ для произвольных $p\in P$ и $s_2\in S_2$. Для этого положим

$$c^*=\max\{v^-(p')\mid p'\in P(p, \bar{s}_1, s_2)\}$$

и $p^*\in P(p, \bar{s}_1, s_2)$, где $v^-(p^*)=c^*$. Из (9), неравенства

$$v^-(s_2(q))\geqq v^-(q) \quad \forall q\in P_2$$

и определения $\bar{s}_1$ следует соотношение

$$h^-(p, \bar{s}_1, s_2)=h^-(p^*, \bar{s}_1, \bar{s}_2)=h^-(p^*, s_1^{c^*}, s_2)\geqq c^*\geqq v^-(p).$$

Таким образом,

(10) $$\inf_{s_2} h^-(p, \bar{s}_1, s_2)=v^-(p) \quad \forall p\in P.$$

Так как по теореме 3.1.8 должно быть

$$v^-(p)=\sup_{s_1}\inf_{s_2} h^-(p, s_1, s_2),$$

стратегия $\bar{s}_1$ является глобально h^--оптимальной.

Пусть теперь выполнено еще (5). Зафиксируем такую стратегию $\bar{s}_2$, что

$$v^-(\bar{s}_2(q))=v^-(q) \quad \forall q\in P_2.$$

Тогда для всех $p\in P$ справедливы неравенства

(11) $$\sup_{s_1} h^-(p, s_1, \bar{s}_2)\leqq h^-(p, \bar{s}_1, \bar{s}_2)=v^-(p)\leqq \inf_{s_2} h^+(p, \bar{s}_1, s_2).$$

Из $v^-(p)\neq-\infty$ и (10) следует

$$\inf_{s_2} h^-(p, \bar{s}_1, s_2)=h^+(p, \bar{s}_1, \bar{s}_2),$$

а это означает, что $p\in D(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$. Из $v^-(p)=-\infty$ мы получаем

$$\sup_{s_1} h^-(p, s_1, \bar{s}_2)=-\infty.$$

Если выбрать $\bar{p}_0 \in P_0$ так, что $H(\bar{p}_0) = \min\{H(p) \mid p \in P_0\}$, то в случае $v^-(p) = -\infty$ получается

$$\text{(12)} \qquad \sup_{s_1} h^-(p, s_1, \bar{s}_2) \leqq H(\bar{p}_0) \leqq \inf_{s_2} h^+(p, \bar{s}_1, s_2).$$

Если мы положим, наконец,

$$f(p) = \begin{cases} \bar{p}_0, & \text{если} \quad v^-(p) = -\infty, \\ p_0(p, \bar{s}), & \text{если} \quad v^-(p) \neq -\infty, \end{cases}$$

то в силу (11) и (12) $\bar{s} = (\bar{s}_1, \bar{s}_2)$ будет ситуацией с требуемыми свойствами, а f — соответствующей функцией равновесия.

В теореме 3.2.3 самым существенным является предположение о существовании в каждом непустом подмножестве множества C наибольшего элемента. Мы использовали его дважды (существование $m(c)$ и c^*). Убедимся теперь на примере в том, что без него *глобально* h^--оптимальная стратегия не обязана существовать даже тогда, когда для каждой позиции p существует *локально* h^--оптимальная стратегия s_1^p.

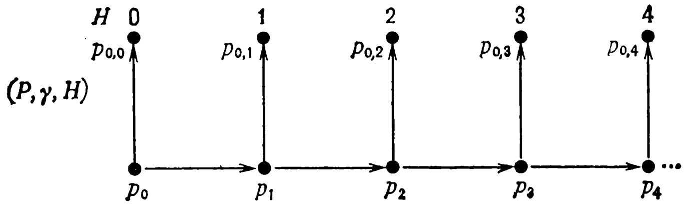

Рис. 6.

Пример 3.2.2. (Ср. рис. 6.) Пусть

$$P_1 = \{p_0, p_2, p_4, \ldots\},$$
$$P_2 = \{p_1, p_3, p_5, \ldots\},$$
$$P_0 = \{p_{0,0}, p_{0,1}, p_{0,2}, \ldots\}, \quad H(p_{0,k}) = k.$$

Мы имеем

$$v^-(p_k) = v^+(p_k) = \begin{cases} k+1, & \text{если } k \text{ четное}, \\ k, & \text{если } k \text{ нечетное}, \end{cases}$$

и

$$\inf_{s_2} h^-\left(p_k, s_1^k, s_2\right) = v\left(p_k\right)$$

при

$$s_1^k(p_t)=\begin{cases} p_{t+1}, & \text{если } t\leqq k,\\ p_{0,t}, & \text{если } t>k,\end{cases}\quad p_t\in P_1.$$

Таким образом, стратегия s_1^k *локально* h^--оптимальна для p_k.

Тем не менее *глобально* h^--оптимальной стратегии $\bar{s}_1$ здесь нет. Именно, если $\bar{s}_1(p_t)=p_{t+1}$ для всех $p_t\in P_1$, то $\inf\limits_{s_2} h^-(p_k, \bar{s}_1, s_2)=-\infty$ для каждого k, а если $\bar{s}_1(p_t)=p_{0,t}$ для некоторой позиции $p_t\in P_1$, то для любой стратегии s_2 будет

$$h^-(p_t, \bar{s}_1, s_2)=t<v^-(p_t).$$

Пример 3.2.2 показывает далее, что в антагонистической терминальной игре для каждой позиции может существовать локальная сильная СРВ, хотя глобальная сильная СРВ не существует. Мы убеждаемся в этом, проверив, что ситуация $s^k=(s_1^k, \bar{s}_2)$, в которой $\bar{s}_2(p_t)=p_{0,t}$ $\forall p_t\in P_2$, является локальной сильной СРВ для $p_k\in P\setminus P_0$.

Однако каждая игра такого рода должна допускать бесконечные партии, бесконечное число окончательных и неокончательных позиций.

Теорема 3.2.4. *Пусть в антагонистической терминальной игре* Γ *для любой позиции существует локальная сильная СРВ. Тогда глобальная сильная СРВ в* Γ *существует, если* Γ *локально конечна или конечно множество* $C=\{v^-(p)\mid p\in P\setminus P_0\}$.

Доказательство. Если игра Γ локально конечна, то утверждение немедленно следует из теорем 3.1.5 и 3.1.6. Если C конечно, то по теореме 3.2.3 существует стратегия $\bar{s}_1$, для которой

$$\inf_{s_2} h^-(p, \bar{s}_1, s_2)=v^-(p)\quad \forall p\in P.$$

Из существования локальной сильной СРВ следует (теорема 3.1.6), что

$$v^-(p)=v^+(p)\quad \forall p\in P.$$

Тем самым можно аналогично теореме 3.2.3 доказать существобание стратегии $\bar{s}_2$, удовлетворяющей условию

$$\sup_{s_1} h^+(p, s_1, \bar{s}_2)=v^+(p)\quad \forall p\in P.$$

Таким образом, для каждой позиции p

$$\sup_{s_1} h^+(p, s_1, \bar{s}_2) = \inf_{s_2} h^-(p, \bar{s}_1, s_2)$$

и, значит, $\bar{s} = (\bar{s}_1, \bar{s}_2)$ является глобальной сильной СРВ.

§ 3.3. Задачи

1. Исходя из примера, представленного на рис. 7, показать, что, вообще говоря, две глобальные слабые СРВ $s^1 = (s_1^1, s_2^1)$ и $s^2 = (s_1^2, s_2^2)$ могут не быть ни равноценными, ни прямоугольными [1]), т. е. они не обладают общей функцией равновесия, и ситуации (s_1^1, s_2^2), (s_1^2, s_2^1) не являются глобальными (локальными) слабыми СРВ. Какую функцию зна-

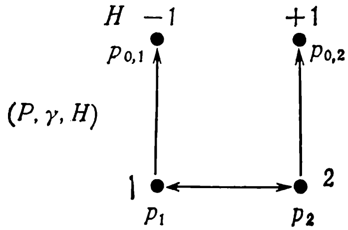

Рис. 7.

чения имеет эта игра? Для каких позиций существуют локальные сильные СРВ?

2. Показать, что если $s^1 = (s_1^1, s_2^1)$ и $s^2 = (s_1^2, s_2^2)$ — две локальные сильные СРВ для позиции p, то

$$h^-(p, s^1) = h^-(p, s^2),$$

а также, что ситуации (s_1^1, s_2^2) и (s_1^2, s_2^1) являются локальными сильными СРВ для p.

3. Доказать, исходя из примера 3.2.2, что из существования локальной сильной СРВ (для каждой позиции), вообще говоря, не следует существования глобальной слабой СРВ $\bar{s}$, для которой $p \in D(\bar{s})$ для всех таких позиций p, что $v^-(p) > -\infty$.

4. Доказать, что в антагонистической терминальной игре глобально h^+-оптимальная стратегия игрока 1 существует тогда и только тогда, когда

$$v^+(p) = \max_{p' \in \gamma p} v^+(p') \quad \forall p \in P_1.$$

5. Доказать, что игра Ним обладает ровно одной функцией значения в том и только том случае, когда функция игры I не ставит в соответствие значения ∞ ни одной вершине графа.

---

[1]) Для краткости здесь и далее мы используем термин «прямоугольность СРВ», хотя точнее было бы говорить о прямоугольности множеств СРВ. — *Прим. перев.*

4

Терминальные игры

В этой главе мы изучаем общие терминальные игры и будем преследовать в основном две цели.

1. Внести ясность в вопрос о существовании решений.

2. Охарактеризовать взаимосвязь различных решений и их свойства.

Наш подход будет аналогичен подходу, примененному в гл. 3. Сначала мы определим функцию решения (в антагонистическом случае она представляет собой некоторую специальную функцию значения) — удобное средство для наших исследований. В § 4.1 мы установим взаимосвязь между функциями решения и глобальными (сильными и слабыми) СРВ, используем ее для формулировки критерия равновесности и для доказательства свойств равноценности и прямоугольности глобальных СРВ в локально конечных играх с взаимно однозначными функциями выигрыша.

Если ограничиться играми с конечным числом окончательных позиций, то взаимная однозначность функций выигрыша H_i становится в известной мере типичным невырожденным случаем (ни один игрок не должен одинаково оценивать две различные окончательные позиции), а коль скоро взаимная однозначность имеет место, для локально конечных игр с дискретными выигрышами получаются следующие утверждения.

Все глобальные СРВ с одной и той же начальной позицией приводят к одной и той же окончательной позиции.

Множество S^0 всех глобальных СРВ непусто и с помощью некоторого отображения γ^0: $P \setminus P_0 \to 2^P$ представимо в виде

$$S^0 = \{s \mid s\colon\ P \setminus P_0 \to P,\ s(p) \in \gamma^0 p\ \ \forall p \in P \setminus P_0\}.$$

Отображение γ^0 ставит в соответствие каждой позиции «правильные» ходы и однозначно определяется с помощью функции решения.

Естественные попытки обобщить теоремы, доказываемые в § 4.1, находятся в центре внимания § 4.2. На основе различных контрпримеров мы покажем, что использованные предположения были существенными и доказанные утверждения не поддаются усилению. В частности, в локально конечных играх с взаимно однозначными функциями выигрыша локальные СРВ (в противоположность глобальным СРВ) не должны быть обязательно равноценными или прямоугольными, ибо локальная СРВ может возникнуть вследствие одного того, что в соответствии с указанным выше отображением γ^0 все игроки ходят «неправильно». Таким образом, даже для «наиболее приятных» неантагонистических терминальных игр этим СРВ присущи недостатки, известные из теории общих стратегических игр.

В § 4.3 мы займемся, наконец, вопросом существования слабых СРВ в не обязательно локально конечных играх n лиц с дискретным выигрышем. Мы покажем, что в случае $n=2$ для каждой позиции игры существует локальная слабая СРВ, а для $n>2$ мы приведем примеры игр с конечным числом позиций, не имеющих глобальных слабых СРВ. Открытыми остаются два вопроса: всегда ли в случае $n=2$ существует глобальная слабая СРВ (как в антагонистических играх) и существуют ли в случае $n>2$ локальные слабые СРВ (хотя бы своя для каждой позиции). Для ответа на каждый из этих вопросов нельзя воспользоваться как вспомогательным средством ни трансфинитной индукцией по порядку графа позиций, ни существованием функции решения. Поэтому положительный ответ в каждом случае требует дальнейшего развития самих методов исследования, а они в свою очередь могли бы дать новые идеи для разработки некоторых комбинаторно-логических проблем.

§ 4.1. Функции решения и ситуации равновесия

Пусть $\Gamma=(P,\gamma,H,n)$ — произвольная терминальная игра.

Определение 4.1.1. Отображение $g\colon P\to P_0$ называется *функцией решения* игры Γ, если оно удовлетворяет следующим условиям:

(D 1) $g(p)=p \qquad \forall p\in P_0;$

(D 2) $H_i(g(p))=\max\limits_{p'\in\gamma p} H_i(g(p')) \qquad \forall p\in P_i,\quad \forall i\in I;$

(D 3) $g(p)\in\{g(p')\mid p'\in\gamma p\} \qquad \forall p\in P_i,\quad \forall i\in I.$

В антагонистической терминальной игре из функции решения g с помощью равенства $v(p)=H_1(g(p))$ получается функция значения, обладающая следующим свойством:

$$v(p)\in\{v(p')\mid p'\in\gamma p\}\cap H_1(P_0)\quad \forall p\in P\setminus P_0.$$

Обратно, существование такой функции значения обеспечивает существование функции решения (задача 1).

Из теорем 3.1.5 и 3.2.1 следует, что в антагонистическом случае существование глобальной сильной СРВ гарантирует существование функции решения, а последняя в свою очередь — существование глобальной слабой СРВ. Как показывает следующая теорема, это справедливо для любой терминальной игры.

Теорема 4.1.1. (a) *Если $\bar{s}$ — такая глобальная сильная СРВ терминальной игры* Γ, *что* $P = D(\bar{s})$, *то равенство*

$$g(p) = p_0(p, \bar{s}) \tag{1}$$

порождает функцию решения этой игры.

(b) *Если g — функция решения игры* Γ, *то каждая ситуация $\bar{s}$, удовлетворяющая условию*

$$g(\bar{s}(p)) = g(p) \quad \forall p \in P \setminus P_0, \tag{2}$$

является глобальной слабой СРВ с функцией равновесия g.

Доказательство. (a) В силу того что $p_0(p, \bar{s}) = p$ для $p \in P_0$ и $p_0(p, \bar{s}) = p_0(\bar{s}(p), \bar{s})$ для $p \in P \setminus P_0$, построенная функция g удовлетворяет требованиям (D 1) и (D 3). Пусть теперь $i \in I$, $p \in P_i$ и $p' \in \gamma p$. Так как $\bar{s}$ — глобальная слабая СРВ и $p \in D(\bar{s})$, для любой стратегии $s_i \in S_i$ должно быть $h_i^-(p, \bar{s} \| s_i) \leqq h_i^-(p, \bar{s})$. Если мы положим, в частности,

$$s_i(q) = \begin{cases} \bar{s}_i(q), & \text{если } q \neq p, \ q \in P_i, \\ p', & \text{если } q = p, \end{cases}$$

то

$$h_i^-(p', \bar{s}) \leqq h_i^-(p, \bar{s}) \quad \text{и} \quad h_i^-(p, \bar{s}) = \max_{p' \in \gamma p} h_i^-(p', \bar{s}),$$

где максимум достигается в $\bar{s}(p)$. Если, наконец, принять во внимание справедливость для любой позиции q равенства $h_i^-(q, \bar{s}) = H_i(p_0(q, \bar{s}))$, то становится ясно, что g удовлетворяет также и требованию (D 2).

(b) Пусть ситуация $\bar{s}$ удовлетворяет условию (2) для функции решения g. Выберем $p \in P$, $i \in I$ и $s_i \in S_i$. Если $p' \in P(p, \bar{s})$, то в силу (2) $g(p') = g(p)$ и, в частности,

$$g(p) \in P_0 \cap P(p, \bar{s}), \quad \text{если} \quad p \in D(\bar{s}). \tag{3}$$

Если $p' \in P(p, \bar{s} \| s_i)$, то из (2) и (D 2) следует

$$H_i(g(p')) \leqq H_i(g(p)).$$

Это неравенство справедливо, в частности, и для $p' \in P(p, \bar{s} \| s_i) \cap P_0$, откуда следует

(4) $\quad h_i^-(p, \bar{s} \| s_i) \leqq H_i(g(p))$.

В силу (3) и (4) $\bar{s}$ является глобальной слабой СРВ, а g — соответствующей функцией равновесия.

В соответствии с теоремой 4.1.1 функция решения устанавливает связь между глобальными сильными и глобальными слабыми СРВ. Каждая глобальная сильная СРВ (даже глобальная слабая СРВ, если она не допускает бесконечные партии) порождает посредством (1) функцию решения, а каждая функция решения с помощью (2) — глобальную слабую СРВ. Кроме того, в силу (D 3) обеспечивается существование ситуации $\bar{s}$, удовлетворяющей условию (2). Если функцию решения рассматривать как отношение эквивалентности на множестве позиций (две позиции p' и p'' называются эквивалентными, если $g(p') = g(p'')$), то требование (2) означает, что ни один игрок не должен «выходить» из класса эквивалентности.

В качестве следствия из последней теоремы мы получаем первый результат о равноценности и прямоугольности глобальных СРВ.

Следствие 4.1.1. *Пусть s^1 и s^2 — две глобальные слабые СРВ терминальной игры* Γ, *удовлетворяющие условиям $P = D(s^1) \cap D(s^2)$ и $p_0(p, s^1) = p_0(p, s^2)$ $\forall p \in P$.*

Тогда для каждого подмножества K множества игроков I ситуация[1] *$s^1 \| s^2_K$ является глобальной сильной СРВ игры* Γ, *а функция $g(p) = p_0(p, s^1)$ — соответствующей функцией равновесия.*

По теореме 4.1.1 (a) функция g является функцией решения. В силу того что $g(p) = g(s^1(p)) = g(s^2(p))$ для всех $p \in P \setminus P_0$, ситуация $\bar{s} = s^1 \| s^2_K$ удовлетворяет условию (2) и теорема 4.1.1 (b) дает требуемое утверждение.

Из дальнейшего применения теоремы 4.1.1 вытекает следующее свойство равновесности.

[1]) Напомним, что в $s^1 \| s^2_K$ игрок i применяет стратегию s^2_i, если $i \in K$, и стратегию s^1_i, если $i \in I \setminus K$.

Теорема 4.1.2. *Ситуация $\bar{s}$ в терминальной игре Γ тогда и только тогда является глобальной слабой СРВ со свойством $P = D(\bar{s})$, когда*

(5) $$h_i^+(p', \bar{s}) \leqq h_i^-(p, \bar{s}) \quad \forall i \in I,\ \forall p \in P_i,\ \forall p' \in \gamma p.$$

Доказательство. Пусть $\bar{s}$ — глобальная слабая СРВ, $P = D(\bar{s})$, а g — полученная для $\bar{s}$ из (1) функция решения. Тогда для $i \in I$, $p \in P_i$ и $p' \in \gamma p$ в силу (D 2) имеем

$$h_i^+(p', \bar{s}) = H_i(p_0(p', \bar{s})) = H_i(g(p')) \leqq H_i(g(p)) = h_i^-(p, s).$$

Пусть теперь $\bar{s}$ удовлетворяет неравенству (5). Тогда для $p \in P_i$

$$h_i^+(p, \bar{s}) = h_i^+(\bar{s}(p), \bar{s}) \leqq h_i^-(p, \bar{s})$$

и, следовательно, $p \in D(\bar{s})$. Таким образом, $P = D(\bar{s})$.

Определим функцию g посредством $g(p) = p_0(p, \bar{s})$. В силу равенства $h_i^+(p, \bar{s}) = h_i^-(p, \bar{s}) = H_i(p_0(p, \bar{s}))$ она удовлетворяет условиям (D 1), (D 2) и (D 3) и, значит, является функцией решения. Так как $\bar{s}$ и g, очевидно, удовлетворяют (2), $\bar{s}$ должна быть глобальной слабой СРВ.

Для любой локально конечной терминальной игры неравенство (5) является необходимым и достаточным условием того, что $\bar{s}$ представляет собой глобальную СРВ. Оно более удобно в обращении, нежели определение глобальной СРВ (ср. определения 1.4.2 и 1.4.3), поскольку следует принимать во внимание не все стратегии, а лишь возможные ходы во всех позициях.

В локально конечной терминальной игре существование функции решения обеспечивает существование глобальной СРВ. Условие (2) показывает далее, как с помощью известной функции решения определить глобальную СРВ. Поэтому следующая теорема будет содержать в качестве частного случая утверждение о том, что каждая локально конечная терминальная игра с дискретными выигрышами обладает глобальной СРВ. Этот результат, сформулированный для игр с полной информацией, является одной из важнейших теорем существования в теории игр. Он был впервые доказан Цермело [1] для игр с конечным числом позиций. Дж. фон Нейман и О. Моргенштерн в своей монографии [1] привели доказательство, продемонстрировавшее справедливость этой теоремы существования для локально ограниченных игр, и, наконец, Берж [1], идею доказательства которого (трансфинитная индукция) мы здесь используем, показал, что каждая локально конечная игра с полной информацией и дискретными выигрышами обладает глобальной СРВ.

Теорема 4.1.3. *Каждая локально конечная терминальная игра с дискретными выигрышами обладает функцией решения.*

Доказательство. По теореме 1.6.1 граф позиций (P, γ) локально конечной игры $\Gamma = (P, \gamma, H, n)$ имеет порядок α_0. Определенные уже при нахождении порядка графа множества Q_α:

$Q_0 = P_0$,

$Q_\alpha = \gamma^+ Q_{\alpha-1}$, если порядковое число α имеет предшественника $\alpha - 1$,

$Q_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} Q_\beta$, если $\alpha > 0$ и не имеет предшественника,

удовлетворяют следующему условию:

$$\gamma p \subset \bigcup_{\beta<\alpha} Q_\beta \quad \forall p \in Q_\alpha, \quad \alpha \leqq \alpha_0 \quad \text{и} \quad Q_{\alpha_0} = P$$

(ср. § 1.6).

Определим теперь функцию решения g индуктивно на множествах $Q_\alpha \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} Q_\beta$ $(\alpha \leqq \alpha_0)$, положив

$g(p) = p \quad \forall p \in Q_0$.

Пусть $g(p)$ уже определено для всех позиций p из $\bigcup_{\beta<\alpha} Q_\beta$; если $p \in P_i \cap \left(Q_\alpha \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} Q_\beta\right)$, то выберем такой элемент $p_0 \in \{g(p') \mid p' \in \gamma p\}$, что

$$H_i(p_0) = \max\{H_i(g(p')) \mid p' \in \gamma p\}.$$

Его существование гарантируется тем, что Γ имеет дискретные выигрыши. Положим $g(p) = p_0$. Из построения немедленно следует, что функция g есть функция решения игры Γ.

В доказательстве последней теоремы условие дискретности выигрышей было необходимо исключительно для того, чтобы обеспечить существование максимального элемента в каждом из множеств $\{H_i(g(p')) \mid p' \in \gamma p\}$. Для этого вовсе не обязательно требовать конечность множества $H(P_0)$, а достаточно, например, предположения о том, что для каждого непустого подмножества $S \subset P_0$ и каждого $i \in I$ множество $H_i(S)$ обладает максимальным элементом (каждая из функций H_i порождает на P_0 полное упорядочение), или предположения, что γp конечно для каждой позиции $p \in P$.

Доказательство теоремы 4.1.3 в то же время обрисовывает способ построения функции решения, который содержательно не отличается от описанного в § 2.1 рекурсивного определения выигрышно-проигрышного разбиения локально конечной игры Ним: если функция g определена уже на некотором подмножестве Q множества всех позиций, удовлетворяющем условиям $P_0 \subset Q$ и $\gamma Q \subset Q$, а функция g удовлетворяет там требованиям (D 1), (D 2) и (D 3), то g можно продолжить в соответствии с (D 2) и (D 3) на множество $Q' = Q \cup \{p \in P \setminus Q \mid \gamma p \subset Q\}$. Если граф (P, γ) имеет конечный порядок, то функция решения строится за конечное число шагов. В противном случае функцию решения необходимо определить дополнительно с помощью обычного индуктивного перехода (впервые мы сталкиваемся с этим на $Q_\omega \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} Q_k$), поскольку мы начинаем с $Q = P_0$, а это явно усложняет конструкцию функции решения. Сложности технического характера при определении функции решения могут возникать также из-за того, что динамику игры γ слишком трудно формализовать (например, в шахматах, которые становятся локально конечной игрой, если искусственно ограничить число ходов), или из-за того, что решение задачи дискретной оптимизации

$$\max \{H_i(g(p')) \mid p' \in \gamma p\},$$

в которую p входит как параметр, само по себе представляет проблему. Вопреки сильно ограниченным таким образом возможностям ее практического вычисления функция решения является полезным средством изучения свойств глобальных ситуаций равновесия в терминальных играх.

Теорема 4.1.4. *Пусть s^1 и s^2 — две глобальные СРВ локально конечной терминальной игры, в которой функции выигрыша H_i каждого игрока являются взаимно однозначными.*

Тогда для каждого подмножества $K \subset I$ ситуация $s^1 \| s^2_K$ также является глобальной СРВ и

$$p_0(p, s^1) = p_0(p, s^2) \quad \forall p \in P.$$

Доказательство. Согласно теореме 4.1.1, достаточно показать, что рассматриваемая игра обладает не более чем одной функцией решения. Тогда из существования глобальной СРВ следует существование в точности одной функции решения g, и мы получаем требуемое утверждение, поскольку ситуации s^1, s^2 вместе с g удовлетворяют равенствам (1) и (2).

Рассмотрим поэтому две функции решения g_1 и g_2 и определенные в ходе доказательства теоремы 4.1.3 множества Q_α.

На Q_0 функции g_1 и g_2 совпадают в силу (D 1). Пусть $g_1(p) = g_2(p)$ для всех $p \in \bigcup_{\beta<\alpha} Q_\beta$. Тогда для $\bar{p} \in Q_\alpha$ будет

$$\gamma\bar{p} \subset \bigcup_{\beta<\alpha} Q_\beta$$

и поэтому

$$\{g_1(p) \mid p \in \gamma\bar{p}\} = \{g_2(p) \mid p \in \gamma\bar{p}\}.$$

Выберем $i \in I$ так, что $\bar{p} \in P_i$. Поскольку функция H_i взаимно однозначна, в множестве $\{g_1(p) \mid p \in \gamma\bar{p}\}$ существует не более одного элемента p_0, для которого

$$H_i(p_0) = \max\{H_i(g_1(p)) \mid p \in \gamma\bar{p}\},$$

и из (D 2) и (D 3) следует $g_1(\bar{p}) = p_0 = g_2(\bar{p})$. Принцип трансфинитной индукции приводит к равенству $g_1 = g_2$.

Свойства равноценности и прямоугольности СРВ, которые установлены в теореме 4.1.4, являются в конечном счете решающими в вопросе о том, рассматривать ли СРВ как решение бескоалиционной игры без ограничения или нет. А именно, если имеется несколько СРВ и игроки выбирают стратегии, которые соответствуют различным СРВ, то, вообще говоря, вовсе не обязательно возникает СРВ. В этом случае игроки должны были бы каким-то образом согласовать свои стратегии, что означает уже некую форму кооперации.

С другой стороны, если разные СРВ благоприятны для нескольких игроков в различной степени и не существует СРВ, лучшей для всех игроков, то совсем не ясно, какую из СРВ следует осуществлять.

Только равноценность и прямоугольность глобальных СРВ в локально конечных терминальных играх с взаимно однозначными функциями выигрышей всех игроков, строго говоря, обосновывают это понятие решения. Если обратиться к конструкции функции решения в доказательстве теоремы 4.1.3, то легко усмотреть, что предположение о взаимной однозначности функций H_i является существенным (соответствующий пример будет приведен в § 4.2). Предположение о локальной конечности представляется, напротив, связанным лишь с техникой доказательства. То, что оно в то же время необходимо для справедливости утверждения теоремы, мы увидим в следующем параграфе.

§ 4.2. Особенности ситуаций равновесия

Целью этого параграфа является более точное рассмотрение результатов, полученных в § 4.1. Мы займемся исследованием следующего вопроса: можно ли усилить доказанные там утверждения и соответственно справедливы ли они при более слабых предположениях; при этом мы специально займемся теоремами 4.1.1 и 4.1.4. Ответ оказывается отрицательным и подтверждается соответствующими примерами.

4.2.1. Игры без функций решения

В теореме 4.1.1 бросается в глаза определенная асимметрия формулировки:

(a) каждая глобальная слабая СРВ, всегда приводящая к конечной партии, порождает функцию решения;

(b) существование функции решения обеспечивает только наличие глобальной слабой СРВ без этого свойства конечности.

Убедимся сначала в том, что относительно утверждения (b) нельзя ожидать ничего большего. Для этого рассмотрим локально конечную игру с дискретными выигрышами, к которой мы добавим одну или несколько позиций, из которых нельзя достичь никакой окончательной позиции. Первоначальная игра обладает функцией решения. Если мы поставим в соответствие добавленным позициям произвольно одну и ту же окончательную позицию, то получим функцию решения расширенной игры. В этой новой игре нет ситуаций, в которых все партии были бы конечными. В простейшем случае граф позиций сконструированной таким способом игры имеет следующий вид:

$$P = \{p_0, p\}, \quad \gamma p_0 = \varnothing, \quad \gamma p = \{p\}.$$

Сложнее ответить на содержащийся в (a) вопрос о том, обеспечивает ли уже существование некоторой *произвольной* глобальной слабой СРВ существование функции решения. Как показывает приведенный ниже пример, ответ на этот вопрос также отрицателен.

Пример 4.2.1. Рассмотрим игру трех лиц с графом позиций (P, γ), изображенным на рис. 8, *a*.

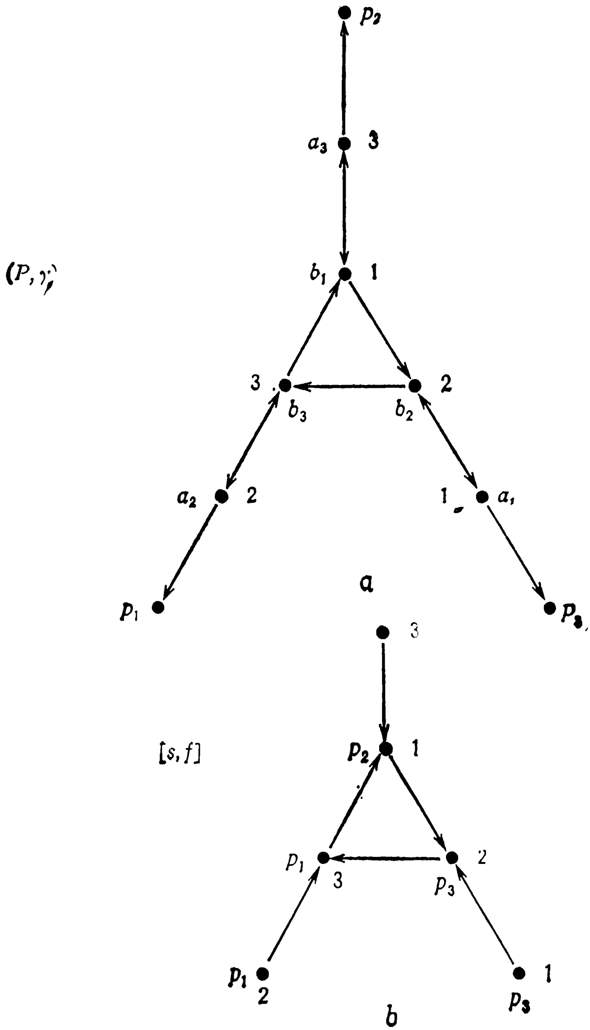

Рис. 8.

Пусть в отдельных вершинах ходят указанные около них игроки, а функции выигрыша удовлетворяют неравенствам

$$H_1(p_1) < H_1(p_2) < H_1(p_3),$$
$$H_2(p_2) < H_2(p_3) < H_2(p_1),$$
$$H_3(p_3) < H_2(p_1) < H_3(p_2).$$

Тогда эта игра имеет глобальную слабую СРВ s с функцией равновесия f, представленной на рис. 8, b.

Для того чтобы убедиться в том, что эта игра не имеет функции решения, предположим противное и рассмотрим сначала позицию a_3. Здесь ходит игрок 3, и он может привести игру к лучшей для него окончательной позиции p_2. Следовательно, $g(a_3) = p_2$. Аналогично сразу же видно, что должно быть $g(a_1) = p_3$ и $g(a_2) = p_1$. В силу $H_1(p_1) < H_1(p_2) = H_1(g(a_3))$ отпадает случай $g(b_1) = p_1$. Также невозможны случаи $g(b_2) = p_2$ и $g(b_3) = p_3$. Рассмотрим два оставшихся случая $g(b_1) = p_2$ и $g(b_1) = p_3$.

Из $g(b_1) = p_2$ в силу

$$H_3(p_2) = \max\{H_3(g(p)) \mid p \in \gamma b_3\}$$

немедленно следует $g(b_3) = p_2$. Значит, $g(\gamma b_2) = \{p_2, p_3\}$ и, следовательно, $g(b_2) = p_3$. Поэтому g не может быть функцией решения, так как $b_2 \in \gamma b_1$ и $H_1(g(b_2)) > H_1(g(b_1))$.

Из $g(b_1) = p_3$ в силу того, что $H_1(g(a_3)) < H_1(p_3)$, сразу следует $g(b_2) = p_3$. Таким образом, в качестве $g(b_3)$ можно рассматривать только p_2, поскольку $g(b_3) = p_3$ уже было исключено, а $g(b_3) = p_1$ противоречит требованию $H_2(g(b_2)) = \max\{H_2(g(p)) \mid p \in \gamma b_2\}$.

Из $g(b_3) = p_2$ мы, однако, получаем, что

$$g(b_3) \notin \{g(p) \mid p \in \gamma b_3\} = \{p_1, p_3\},$$

а это снова показывает, что g не может быть функцией решения. Таким образом, заданная игра на самом деле не обладает функцией решения.

Указанная для этой игры глобальная слабая СРВ s не обладает функцией равновесия f, удовлетворяющей условию

$$f(s(p)) = f(p) \quad \forall p \in P \setminus P_0,$$

т. е. ситуация s не *однородна*. С некоторым трудом можно убедиться в том, что данная игра вообще не имеет однородных глобальных слабых СРВ. Поэтому возникает предположение, что существование однородной глобальной слабой СРВ во всяком случае могло бы гарантировать существование функции решения. Оно, однако, опровергается следующим примером.

Пример 4.2.2. (Ср. рис. 9.) Пусть функции выигрыша удовлетворяют неравенствам

$$H_1(p_2) < H_1(p_3) < H_1(p_1),$$
$$H_2(p_3) < H_2(p_1) < H_2(p_2),$$
$$H_3(p_1) < H_3(p_2) < H_3(p_3).$$

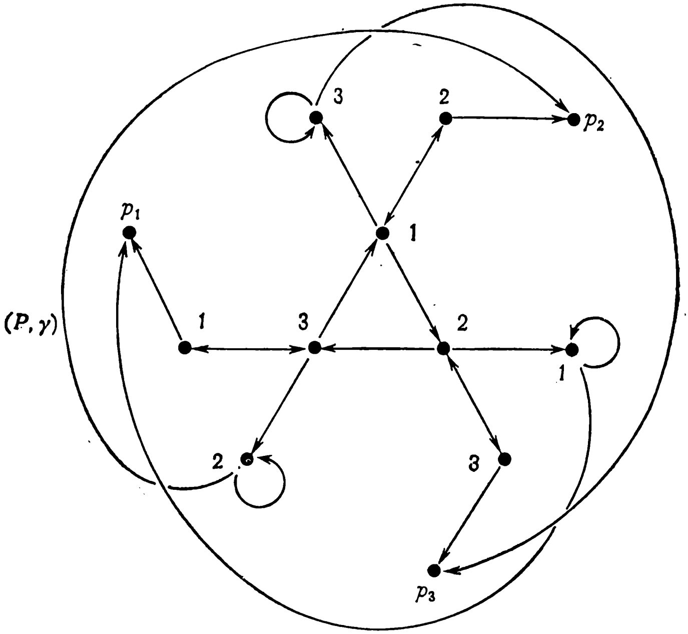

Рис. 9.

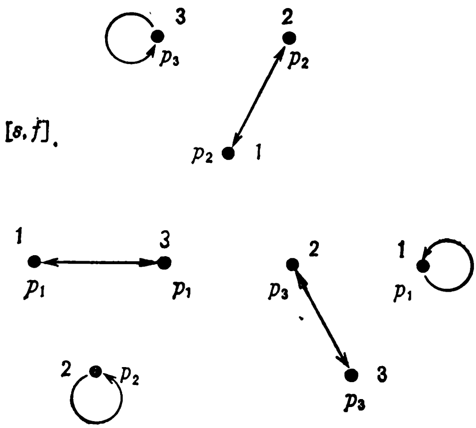

Рис. 10.

Существует однородная глобальная слабая СРВ s, изображенная вместе со своей функцией равновесия f на рис. 10.

Отсутствие функции решения можно проверить аналогично примеру 4.2.1, рассмотрев внутренний цикл графа (P, γ).

4.2.2. Отсутствие равноценности и прямоугольности ситуаций равновесия

По теореме 4.1.4 все глобальные сильные СРВ терминальной игры Г равноценны и прямоугольны, если (a) все функции выигрыша H_i взаимно однозначны и, кроме того, (b) игра Г локально конечна.

Поскольку в рассмотренных до сих пор примерах *все* глобальные сильные СРВ были равноценными и прямоугольными, не совсем ясно, в какой мере эти предположения необходимы. Кроме того, естественно возникает вопрос о том, справедливо ли утверждение теоремы для *локальной* сильной СРВ. На примере следующих трех игр мы покажем, что теорема 4.1.4 неверна, если

1) отказаться от предположения (a);
2) отказаться от предположения (b);
3) перенести утверждения на локальные сильные СРВ.

Пример 4.2.3. Игра Г является локально ограниченной игрой двух лиц, глобальные СРВ в ней не являются ни равноценными, ни прямоугольными (ср. рис. 11).

Ситуации s^1, s^2 на рис. 12 являются глобальными СРВ.

В силу того что $h_2^-(a_1, s^1) < h_2^-(a_1, s^2)$, эти ситуации не равноценны. Кроме того, ситуация (s_1^1, s_2^2) не является глобальной СРВ.

Пример 4.2.4. Игра Г четырех лиц с взаимно однозначными функциями выигрыша всех игроков не является локально конечной. Глобальные СРВ в ней не являются ни равноценными, ни прямоугольными (ср. рис. 13). Пусть выполнены неравенства

$$\begin{aligned}
&H_1(p_2) < H_1(p_1) < H_1(p_3)\,(< H_1(p_4)),\\
&H_2(p_1) < H_2(p_2) < H_2(p_3)\,(< H_2(p_4)),\\
&H_3(p_4) < H_3(p_3) < H_3(p_1)\,(< H_3(p_2)),\\
&H_4(p_3) < H_4(p_4) < H_4(p_1)\,(< H_4(p_2)).
\end{aligned}$$

Обозначим через s^1 ту ситуацию, в которой игроки 1 и 2 переводят игру соответственно в p_1 и p_2, а игроки 3 и 4, напротив, не переводят игру в окончательную позицию. Пусть в ситуации s^2, наоборот, именно игроки 3 и 4 выбирают соот-

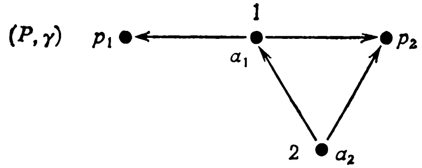

Рис. 11. $H_1(p_1) = H_1(p_2)$, $H_2(p_1) < H_2(p_2)$.

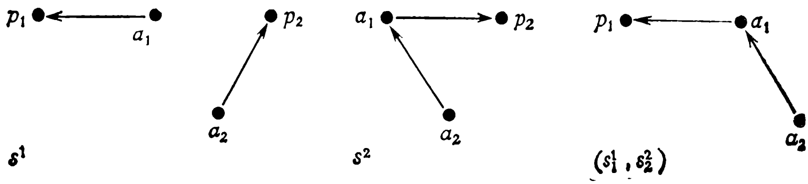

Рис. 12.

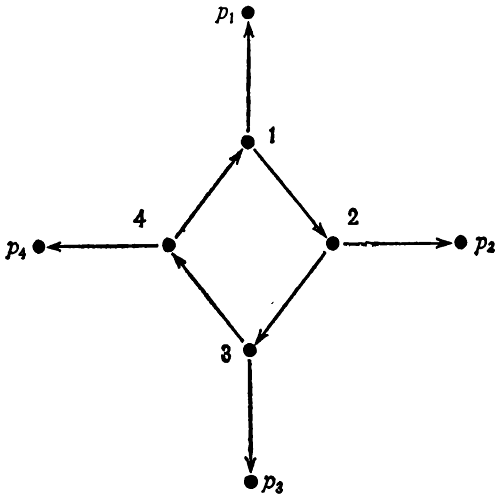

Рис. 13.

ветственно p_3 и p_4, а игроки 1 и 2 отказываются от выбора окончательных позиций.

Тогда, как легко видеть, s^1 и s^2 — глобальные сильные СРВ. Для каждой позиции $p \in P \setminus P_0$ и каждого игрока i будет

$$h_i^-(p, s^1) \neq h_i^-(p, s^2)$$

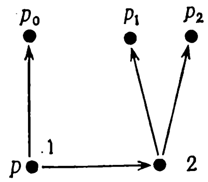

Рис. 14. $H_1(p_2) < H_1(p_0) < H_1(p_1)$, $H_2(p_2) < H_2(p_1) < H_2(p_0)$.

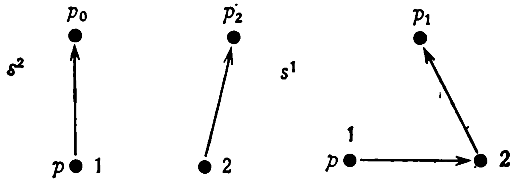

Рис. 15.

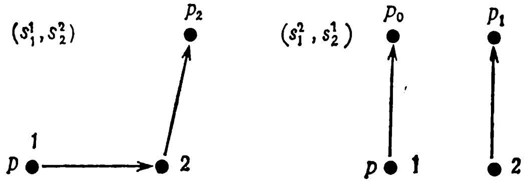

Рис. 16.

и построенная из s^1 и s^2 ситуация $s = (s_1^2, s_2^2, s_3^1, s_4^1)$ является глобальной сильной СРВ. То же самое можно сказать и о ситуации $s' = (s_1^1, s_2^1, s_3^2, s_4^2)$.

Пример 4.2.5. Г — локально ограниченная (неантагонистическая) игра двух лиц с взаимно однозначными функциями выигрыша обоих игроков. Локальные СРВ в ней не являются ни равноценными, ни прямоугольными (рис. 14).

Ситуация s^1 является единственной глобальной СРВ, а ситуация s^2 — локальной СРВ для позиции p (рис. 15).

Мы имеем

$$h_2^-(p, s^1) = H_2(p_1) < H_2(p_0) = h_2^-(p, s^2).$$

Ни ситуация $s = (s_1^1, s_2^2)$, ни ситуация $s' = (s_1^2, s_2^1)$ не являются локальными СРВ для p (рис. 16).

Примеры 4.2.3 и 4.2.4 показывают, что в том случае, когда не выполнены предположения теоремы 4.1.4, глобальные сильные СРВ могут страдать теми же недостатками, что и СРВ общих неантагонистических стратегических игр.

Особого внимания заслуживает пример 4.2.5. По сравнению с глобальной СРВ в s^2 оба игрока ходят в каждой позиции «неправильно», и возникает локальная СРВ. «Плохим» выбором p_2 второй игрок вынуждает первого выбирать p_0 и тем самым обеспечивает себе больший выигрыш. Представляется разумным рассматривать выбор p_2 как *угрозу* игрока 2 игроку 1 (которая, конечно, осмысленна только в том случае, когда партия начинается в p). Далее, последний пример иллюстрирует тот факт, что даже в локально ограниченной игре глобальные СРВ, вообще говоря, не составляются элементарным образом из локальных СРВ. То есть если s^p $(p \in P)$ является локальной СРВ для позиции p, то ситуация s, определенная равенством

$$s(p) = s^p(p) \quad \forall p \in P \setminus P_0,$$

может не быть глобальной СРВ. В локально конечных антагонистических играх, напротив, таким способом можно построить глобальную СРВ (см. теоремы 3.1.5 и 3.1.6).

§ 4.3. Замечания о существовании ситуаций равновесия

Мы уже установили, что каждая локально конечная терминальная игра с дискретными выигрышами имеет глобальную (сильную) СРВ (теорема 4.1.3), а каждая антагонистическая терминальная игра (также с дискретными выигрышами) — однородную глобальную слабую СРВ (теорема 3.2.2). Предположение о дискретности выигрышей здесь, очевидно, существенно, поскольку легко построить игры, которые не обладают этим свойством и ни для одной неокончательной позиции не имеют локальной слабой СРВ. Например, это так, если $\gamma p \subset P_0 \subset R^1$ для всех $p \in P \setminus P_0$, γp открыто, а H_i — строго монотонная функция для каждого $i \in I$.

Поэтому в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением терминальных игр с дискретными выигрышами и покажем существование локальных слабых СРВ для игр двух лиц. Мы увидим также, что игры n лиц в случае $n \geqq 3$ имеют глобальные слабые СРВ не всегда. Все же два основных вопроса остаются открытыми.

4.3.1. Открытые вопросы

1. Существует ли для каждой позиции игры n лиц $(n \geqq 3)$, с дискретными выигрышами локальная слабая СРВ?

2. Существует ли для каждой игры двух лиц с дискретными выигрышами глобальная сильная СРВ?

Если бы ответ на первый вопрос был положителен, то это подтвердило бы интуитивное предположение о том, что каждая терминальная игра с полной информацией и конечным числом градаций выигрышей (при фиксированной начальной позиции) имеет СРВ в чистых стратегиях при условии, что в неопределенном случае бесконечной партии выигрыши игроков устанавливаются надлежащим образом. Тем самым для игр без дискретных выигрышей в том случае, когда все множества $H_i(P_0)$ имеют конечную верхнюю грань, получалось бы соответствующее утверждение о существовании ε-СРВ [1]).

Ответ на второй вопрос, с одной стороны, мог бы помочь при изучении первого вопроса для $n=3$; с другой стороны, он определил бы, занимают ли антагонистические игры особое место в вопросе о существовании глобальных СРВ среди терминальных игр двух лиц. Помимо этой центральной роли, которую оба этих вопроса играют для пополнения теории позиционных игр, они вообще существенны для дальнейшего развития методов исследования позиционных игр. Поскольку мы имеем дело с играми, не являющимися локально конечными, то, во-первых, отпадает как средство доказательства трансфинитная индукция по порядку графа позиций. Во-вторых, нет никаких оснований ожидать, что для ответа хотя бы на один из этих двух вопросов можно было бы использовать удобное для антагонистических игр понятие функции значения. Эти же трудности возникают и тогда, когда множество позиций предполагается конечным. Правда, в этом случае напрашивается идея разрешить вопрос с помощью индукции по общему числу вершин и дуг графа позиций (P, γ) и использовать следующее рассуждение.

Если дана терминальная игра $\Gamma=(P, \gamma, H, n)$ ($n \geqq 3$ и фиксировано) с конечным числом позиций, в которой *не* для каждой позиции существует локальная слабая СРВ, то среди всех таких игр существует игра с минимальным общим числом вершин и дуг (т. е. число $|P|+\sum_{p \in P}|\gamma p|$ минимально). Рассмотрим такую «минимальную» игру Γ^0 и примем, что не существует локальной слабой СРВ для позиции $\bar{p}$. В Γ^0 имеются хотя бы две позиции и две дуги (два хода). Запретим какой-либо ход из p в q ($q \in \gamma p$). В получающейся но-

[1]) В том смысле, что в определении 1.4.1 условие (D 2) заменяется условием

$$h_i^-(p, s \| t_i) \leqq H_i(p_0)+\varepsilon \quad \forall i \in I,\ \forall t_i \in S_i.$$

вой игре для $\bar{p}$ уже существует локальная слабая СРВ $s_{p,q}$. Поскольку ситуация $s_{p,q}$ не является локальной слабой СРВ в Γ^0 для $\bar{p}$, найдется такая стратегия t_i игрока, которому принадлежит очередь хода в позиции p, что

$$h_i^-(\bar{p}, s_{p,q} \| t_i) > H_i(f(\bar{p})).$$

Отсюда с помощью конкретного выбора позиций p и q мы получаем некоторую информацию о «минимальном контрпримере» Γ^0. Следовательно, в случае $p \neq \bar{p}$ позиция p, очевидно, должна быть достижима из $\bar{p}$, для чего множество всех заканчивающихся в p дуг $\gamma^- p$ должно быть непустым. Далее, не может быть $q = \bar{p}$, так как в противном случае игрок i, используя ход (p, q), добивается только бесконечной партии. Мы получаем таким образом, что $\gamma^- \bar{p} = \varnothing$. Дальнейшие свойства игры Γ^0 описываются в § 4.4. Все они могут быть установлены без особого труда.

Следует ожидать, что так получаемая информация об игре Γ^0 облегчает ответ на первый вопрос (к ответу на второй вопрос, естественно, можно подходить сходным образом). Автору, однако, не удалось пока таким путем найти ответы на эти вопросы (для игр с конечным множеством позиций).

4.3.2. Два результата

Мы докажем уже упомянутый выше результат, заключающийся в том, что в каждой игре двух лиц с дискретными выигрышами для каждой позиции существует локальная слабая СРВ. Далее мы приведем пример игры n лиц ($n \geqq 3$), не имеющей глобальной слабой СРВ. Тем самым вопросы существования СРВ в терминальных играх по существу сводятся к указанным в предыдущем пункте проблемам.

Теорема 4.3.1. *Для каждой позиции терминальной игры двух лиц с дискретными выигрышами существует локальная слабая СРВ.*

Доказательство. Пусть $\Gamma = (P, \gamma, H, 2)$ — игра с дискретными выигрышами и $\bar{p} \in P$ — некоторая фиксированная позиция. Рассмотрим антагонистическую терминальную игру Γ', получающуюся из Γ, если второму игроку приписать функцию выигрыша $H_2' = -H_1$, оставив остальное без изменения. По теореме 3.1.3 игра Γ' имеет минимальную функцию значения v^-. Далее, поскольку Γ' является игрой с дискретными выигрышами, существует ситуация $s^- = (s_1, s_2^-)$, удовлетворяющая равенству

$$v^-(s^-(p)) = v^-(p) \quad \forall p \in P \setminus P_0.$$

В игре Г существует стратегия s_2^+ игрока 2, которая с начальной позицией $\bar{p}$ обеспечивает ему максимальный выигрыш против стратегии s_1, т. е.

$$h_2^-(\bar{p}, s_1, s_2^+) = \sup_{t_2 \in S_2} h_2^-(\bar{p}, s_1, t_2).$$

Чтобы это равенство было выполнено, достаточно разумно определить стратегию s_2^+ только в позициях из $P_2 \cap P(\bar{p}, s_1, s_2^+)$. Построим стратегию s_2 по следующему правилу:

$$s_2(p) = \begin{cases} s_2^+(p), & \text{если} \quad p \in P_2 \cap P(\bar{p}, s_1, s_2^+), \\ s_2^-(p), & \text{если} \quad p \in P_2 \setminus P(\bar{p}, s_1, s_2^+). \end{cases}$$

Тогда, как и для $s_2 = s_2^+$, справедливо равенство

(1) $$h_2^-(\bar{p}, s_1, s_2) = \sup_{t_2 \in S_2} h_2^-(\bar{p}, s_1, t_2).$$

Ситуация $s = (s_1, s_2)$ и функция значения v^- удовлетворяют условиям

(2) $$v^-(s(p)) = v^-(p) \quad \forall p \in P_1 \cup (P_2 \setminus P(\bar{p}, s)),$$

(3) $$v^-(s(p)) \geqq v^-(p) \quad \forall p \in P(\bar{p}, s) \cap P_2,$$

(4) $$v^-(s(p)) = \max_{p' \in \gamma p} v^-(p') \quad \forall p \in P_1.$$

Пусть теперь $f(\bar{p})$ для $\bar{p} \in D(s)$ является окончательной позицией множества $P(\bar{p}, s)$, а для $\bar{p} \notin D(s)$ — произвольной окончательной позицией. Тогда из (1) следует

(5) $$\sup_{t_2 \in S_2} h_2^-(\bar{p}, s_1, t_2) \leqq H_2(f(\bar{p})).$$

С другой стороны, если $t_1 \in S_1$ и $p \in P(\bar{p}, t_1, s_2)$, то (2), (3) и (4) обеспечивают выполнение неравенства $v^-(p) \leqq H_1(\bar{p})$, откуда мы получаем

(6) $$\sup_{t_1 \in S_1} h_1^-(\bar{p}, t_1, s_2) \leqq H_1(f(\bar{p})).$$

В силу (5), (6) и выбора $f(\bar{p})$ ситуация s является локальной слабой СРВ для позиции $\bar{p}$ в игре Г.

Для того чтобы убедиться в том, что существует терминальная игра с конечным множеством позиций, в которой нет глобальных слабых СРВ, рассмотрим следующий пример.

Пример 4.3.1. Пусть $n=3$. Может не существовать глобальной слабой СРВ, но при этом существовать локальная сильная СРВ для каждой позиции (задача 5); см. рис. 17.

Пусть

$$H_1(p_3) < H_1(p_1) < H_1(p_2),$$
$$H_2(p_1) < H_2(p_2) < H_2(p_3),$$
$$H_3(p_2) < H_3(p_3) < H_3(p_1).$$

Случай 1. Игрок решает в своих позициях выбирать соответствующую окончательную позицию.

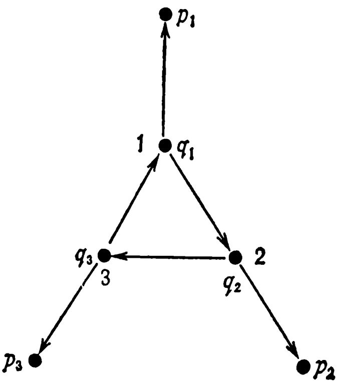

Рис. 17.

Пусть $s(q_1)=p_1$. Чтобы s была локальной слабой СРВ для позиций q_1 и q_3, должно быть $s(q_2)=q_3$ и соответственно $s(q_3)=q_1$. Таким образом, $p_1=p_0(q_2, s)$, и, в силу того что

$$H_2(p_1) < H_2(p_2) = \max_{t_2 \in S_2} h_2^-(q_2, s \| t_2),$$

ситуация s не может быть локальной слабой СРВ для q_2. В силу симметрии игры аналогично исключаются случаи $s(q_2)=p_2$ и $s(q_3)=p_3$.

Случай 2. Ни один игрок не выбирает окончательную позицию, т. е. $s(q_i) \neq p_i \forall i$.

Исследуем, каким образом можно было бы определить функцию равновесия f в q_1. Множество $P(q_1, s)$ состоит из позиций q_1, q_2, q_3. В то время как игрок i отклоняется от ситуации s и решает ходить из q_i в p_i, он может обеспечить себе выигрыш $H_i(p_i)$. Тогда в силу $H_1(p_3) < H_1(p_1)$ для $i=1$ отпадает $f(q_1)=p_3$.

Если мы положим $i = 2$ и $i = 3$, то соответственно

$$f(q_1) \neq p_1 \text{ и } f(q_1) \neq p_2.$$

Следовательно, для ситуации s не существует функции равновесия.

После примера 4.3.1 нетрудно задать игру n лиц ($n > 3$) с конечным множеством позиций, не имеющую глобальных

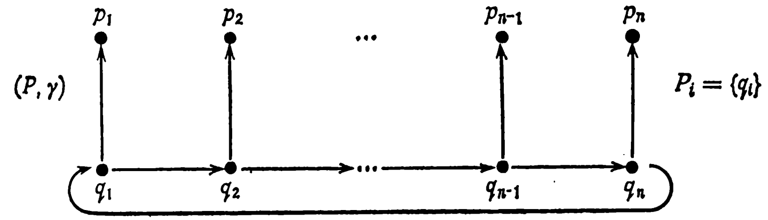

Рис. 18.

слабых СРВ. Для этого к последней игре просто добавляются позиции q_k ($k = 4, \ldots, n$), которые недостижимы из остальных, и предполагается $\gamma q_k = \{q_k\} = P_k$, причем H_k определяются произвольно.

Для случая $n > 3$ менее тривиальным является следующий пример, который можно рассматривать как обобщение примера 4.3.1.

Пример 4.3.2. Пусть $n > 3$. Не существует глобальной слабой СРВ (см. рис. 18), и выполнено неравенство

$$H_i(p_{i \dot{+} (-1)}) < H_i(p_i) < H_i(p_{i \dot{+} 1}) < \ldots < H_i(p_{i \dot{+} (n-2)}),$$

причем

$$i \dot{+} k = \begin{cases} i + k, & \text{если } i + k \leqq n, \\ i + k - n, & \text{если } i + k > n. \end{cases}$$

Проверку того, что глобальной слабой СРВ здесь нет, можно провести способом, аналогичным использованному в примере 4.3.1.

§ 4.4. Задачи

1. Доказать, что антагонистическая терминальная игра имеет функцию решения тогда и только тогда, когда существует такая функция значения v этой игры, что

$$v(p) \in \{v(p') \mid p' \in \gamma p\} \cap H_1(P_0) \quad \forall p \in P \setminus P_0.$$

2. Пусть игра $\Gamma = (P, \gamma, H, n)$ является игрой с минимальной суммой числа вершин и дуг среди всех таких терминальных игр n лиц (n фикси-

ровано) с конечным множеством позиций, в которых для некоторых позиций не существует локальных слабых СРВ, и пусть для позиции $\bar{p}$ не существует локальной слабой СРВ. Доказать, что тогда

a) $\gamma^- \bar{p} \overset{\mathrm{df}}{=} \{p \mid \bar{p} \in \gamma p\} = \varnothing$;
b) $\gamma^- p \neq \varnothing$, если $p \neq \bar{p}$;
c) $p \in P_i \Rightarrow |\gamma p| \geqq 2$;
d) $p \in P_i \Rightarrow \gamma p \cap P_i = \varnothing$;
e) $|\gamma p \cap P_0| \leqq 1 \quad \forall p \in P$;
f) $p_0 \in \gamma P_i \cap P_0 \Rightarrow \min\limits_{p \in P_0} H_i(p) < H_i(p_0) < \max\limits_{p \in P_0} H_i(p)$;
g) $\{p \mid \varnothing \neq \gamma p \subset P_0 \cup \gamma^- P_0\} \neq \varnothing \quad (\gamma^- P_0 \overset{\mathrm{df}}{=} \{q \mid \gamma q \cap P_0 \neq \varnothing\})$;
h) $q \in \gamma p \setminus P_0 \Rightarrow \gamma q \setminus \gamma p \neq \varnothing$.

3. Построить такую игру, что рассмотренная в следствии 4.1.1 глобальная слабая СРВ $s^1 \| s_K^2$ не обладает свойством конечности $D\left(s^1 \| s_K^2\right) = P$.

4. Рассмотрим следующую неантагонистическую игру двух лиц: игрок 1 ходит в точности в одной позиции p и должен выбрать некоторую точку c из непустого компактного множества C в R^n. Затем ходит игрок 2; при этом он, зная c, выбирает точку x из многогранника

$$M = \{x \in R^n \mid Ax \leqq b, \ x \geqq 0\}.$$

После этого игроки получают соответственно выигрыши $H_1(x) = d'x$ и $H_2(x) = c'x$.

Предположим, что A — заданная $(m \times n)$-матрица, b и d — заданные векторы соответствующей размерности, а многогранник M непуст и ограничен.

Мы имеем здесь дело с простой формой связи с задачами оптимального программирования — кругом проблем, исследованных Н. Н. Воробьевым, В. В. Малинниковым и А. И. Соболевым [1].

Если рассматривать игрока 2 как некоторое предприятие, оптимизирующее свой производственный план x в соответствии с заданными коэффициентами выигрыша (это компоненты c), то задача «руководителя» 1 состоит в таком задании коэффициентов, чтобы возможно лучше согласовать свои интересы (H_1) с результатом оптимизации плана.

Показать с помощью теоремы двойственности (см., например, Ножичка, Гуддат и Холлатц [1] [1])), что существует функция решения g этой игры, для которой

$$H_1(g(p)) = \max \{d'x \mid (x, u, c) \in L\},$$

где

$$L = \{(x, u, c) \mid x \in R^n, \ u \in R^m, \ c \in C, \ x \geqq 0, \ u \geqq 0, \ Ax \leqq b, \ u'A \geqq c, \ b'u \leqq c'x\}.$$

5. Доказать, что для каждой позиции игры, рассмотренной в примере 4.3.1, существует локальная сильная СРВ (то же справедливо и для примера 4.3.2).

---

[1]) См. также, например, книгу Д. Б. Юдина и Е. Г. Гольштейна [1]*. — *Прим. ред.*

Приложение

Теоретико-множественные основы

Во многих приведенных здесь доказательствах вспомогательным средством были порядковые числа и трансфинитная индукция. В этой книге не имело бы смысла проводить глубокие рассуждения, приводящие к этим теоретико-множественным понятиям, или же доказывать на этой основе известные теоремы о порядковых числах. По этому поводу следует сослаться на соответствующую литературу.

Цель этого приложения состоит скорее в том, чтобы привести те теоретико-множественные результаты, выходящие за пределы элементарной теории множеств, которые мы, в частности, использовали — теоретико-множественный фундамент, на котором мы смогли делать наши построения. При этом мы следуем в основном книге Клауа [1], где можно найти также доказательства приведенных ниже утверждений.

§ П.1. Вполне упорядоченные множества

Рассмотрим произвольное множество X и некоторое определенное в этом множестве бинарное отношение R [1]).

Определение 1. Пара (X, R) называется *вполне упорядоченным множеством* [2]), если выполнены следующие условия:

a) $(x \neq y \wedge x, y \in X) \Rightarrow$ либо $x < y(R)$, либо $y < x(R)$;

b) $(x, y \in X \wedge x < y(R)) \Rightarrow x \neq y$;

c) $(x, y, z \in X \wedge y < x(R) \wedge z < y(R)) \Rightarrow z < x(R)$;

d) $(\varnothing \neq M \subset X) \Rightarrow \exists x_M \in M: (y \in M \wedge y \neq x_M) \Rightarrow x_M < y(R)$.

Первые три требования означают соответственно полноту (a), антисимметричность (b) и транзитивность (c)

---

[1]) Каждое бинарное отношение R можно рассматривать как подмножество $\mathscr{R}$ произведения $X \times X$ и обратно: $(x, y) \in \mathscr{R} \Leftrightarrow x < y(R)$.

[2]) В дословном переводе — полная упорядоченность, однако мы используем принятый в советской литературе термин «вполне упорядоченное множество». Читатель может найти соответствующие результаты, например, в книге И. П. Натансона [1]*. — *Прим. перев.*

отношения R. Требование (d) означает существование в каждом непустом подмножестве M из X наименьшего элемента в смысле R.

Определение 2. Два вполне упорядоченных множества (X_1, R_1) и (X_2, R_2) имеют *один порядковый тип*, если существует такое взаимно однозначное отображение f множества X_1 на X_2, что

$$x_1 < y_1 (R_1) \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \ (R_2).$$

Пусть теперь $W = (X, R)$ — вполне упорядоченное множество и $x \in X$. Обозначим через W_x следующее вполне упорядоченное множество (Y_x, R_x):

$$Y_x = \{y \in X \mid y < x(R)\},$$
$$y_1 < y_2 (R_x) \Leftrightarrow y_1 < y_2 (R) \quad (y_1, y_2 \in Y_x).$$

Вполне упорядоченное множество W_x называется *отрезком вполне упорядоченного множества* W и получается при рассмотрении только элементов из X, меньших, чем x, в смысле R, в их заданном «порядке».

Теорема 1 (основная теорема о вполне упорядоченных множествах). *Пусть* $W_1 = (X_1, R_1)$ *и* $W_2 = (X_2, R_2)$ — *произвольные вполне упорядоченные множества. Тогда имеет место в точности одно из следующих утверждений.*

1. W_1 *и* W_2 *имеют один и тот же порядковый тип.*

2. *Существует такой* $x_1 \in X_1$, *что* W_{1x_1} *и* W_2 *имеют один порядковый тип.*

3. *Существует такой* $x_2 \in X_2$, *что* W_1 *и* W_{2x_2} *имеют один порядковый тип.*

В первом случае мы будем писать $W_1 \sim W_2$, а в случаях 2 и 3 соответственно $W_2 \prec W_1$ и $W_1 \prec W_2$ (при этом мы говорим: W_2 эквивалентно W_1, меньше и соответственно больше, чем W_1).

Теорема 2. *Пусть* (X, R) — *вполне упорядоченное множество и* $\{x_k\}_{k=1, 2, \ldots}$ — *такая последовательность в* X, *что*

$$x_1 > x_2 > \ldots > x_k > x_{k+1} > \ldots \quad (R).$$

Тогда последовательность $\{x_k\}$ *конечна.*

Тот факт, что в каждом вполне упорядоченном множестве строго убывающая последовательность конечна, мы существенно использовали в доказательстве теоремы 1.6.1.

Теорема 3 (принцип трансфинитной индукции). *Пусть* $W=(X, R)$ — *вполне упорядоченное множество и* A — *подмножество* X. *Если для наименьшего элемента* x_0 *из* X (в смысле отношения R) *выполнено* $x_0 \in A$ *и если далее для произвольного* $x \in X$ *из* $Y_x \subset A$ *следует* $x \in A$, *то* $A = X$.

Теорема 4 (определение с помощью трансфинитной индукции). *Пусть* (X, R) — *вполне упорядоченное множество,* B — *множество и* $G_x (x \in X)$ — *множество всех отображений из* Y_x *в* B. *Далее, пусть* $G = \bigcup\limits_{x \in X} G_x$ *и* T: $G \to B$. *Тогда существует в точности одно отображение* f: $X \to B$, *для которого*

$$f(x) = T\left(f|_{Y_x}\right) \quad \forall x \in X$$

здесь $f|_{Y_x}$ обозначает сужение f на область определения Y_x).

По теореме 4 отображение f множества X в B можно определить следующим образом:

(D 1) задать образ $f(x_0)$ наименьшего элемента x_0 из X;

(D 2) задать однозначное правило T построения образа $f(x)$ по образам $f(y)$ всех элементов $y < x(R)$.

Теорема 5 (теорема о полном упорядочении). *Для любого множества* X *существует такое отношение* R, *что* (X, R) *является вполне упорядоченным множеством* (*т. е. каждое множество можно сделать вполне упорядоченным*).

Теорема 6 (аксиома выбора). *Пусть* X *и* Y — *непустые множества и* F — *такое отображение из* X *в* 2^Y, *что*

$$F(x) \neq \varnothing \quad \forall x \in X.$$

Тогда существует такое отображение f: $X \to Y$, *что*

$$f(x) \in F(x) \quad \forall x \in X.$$

Мы использовали аксиому выбора (эквивалентную теореме о полном упорядочении) уже тогда, когда молчаливо предполагали существование стратегий.

§ П.2. Порядковые числа и их суммы

По определению 2 мы можем различать вполне упорядоченные множества одинаковых и различных порядковых типов.

Поэтому естественно возникает идея ставить в соответствие каждому вполне упорядоченному множеству W некоторую величину $\alpha(W)$, являющуюся его порядковым типом;

представляется также разумным требовать, чтобы равенство $\alpha(W_1) = \alpha(W_2)$ выполнялось в том и только том случае, когда $W_1 \sim W_2$.

Таким способом можно было бы ставить в соответствие всем вполне упорядоченным множествам одного типа некоторый объект, обозначающий их общий порядковый тип.

Строгое обоснование того, что подобного рода соответствие существует, т. е. что наша идея осуществима, выводит на границу между теорией множеств и философией. Существенная трудность состоит здесь в том, что «множество всех вполне упорядоченных множеств заданного типа» и «множество всех порядковых типов» не существуют. Поэтому мы примем как аксиому существование объектов, представляющих порядковые типы вполне упорядоченных множеств, и назовем эти объекты *порядковыми* (*трансфинитными*) *числами*.

Поскольку два конечных вполне упорядоченных множества (слово «конечные» относится к основному множеству) имеют один и тот же тип тогда и только тогда, когда соответствующие множества имеют одно и то же число элементов, можно отождествить порядковые числа, соответствующие конечным вполне упорядоченным множествам (называемые конечными порядковыми числами), с натуральными числами (включая нуль как представление пустого вполне упорядоченного множества). Обычно порядковые числа обозначаются греческими буквами. При этом ω обозначает порядковый тип множества всех натуральных чисел в их естественном порядке. При обращении с порядковыми числами следует принять во внимание следующее.

Теорема 7. *Не существует множества всех порядковых чисел.*

Таким образом, можно рассматривать *те или иные* множества порядковых чисел, но не множество *всех* порядковых чисел.

Определение 3. Пусть α и β — два порядковых числа. Будем говорить, что α *меньше*, *чем* β ($\alpha < \beta$), если для двух вполне упорядоченных множеств W_α и W_β соответственно с порядковыми типами α и β выполнено соотношение $W_\alpha \prec \prec W_\beta$.

Независимость этого и следующего определений от представлений следует из определения порядкового типа и отношения «меньше» между вполне упорядоченными множествами (теорема 1). Далее справедлива следующая теорема.

Теорема 8. *Каждое множество порядковых чисел вместе с заданным в определении 3 отношением* $<$ *образует вполне упорядоченное множество. В частности, если* $X(\alpha)$ — *множество всех порядковых чисел, меньших порядкового числа* α, *то* α *является порядковым типом вполне упорядоченного множества* $(X(\alpha), <)$.

Определение 4. Пусть $W_\alpha = (X, R_X)$ и $W_\beta = (Y, R_Y)$ — два вполне упорядоченных множества соответственно типов α и β, и пусть $X \cap Y = \varnothing$. Тогда через $\alpha + \beta$ обозначается порядковый тип вполне упорядоченного множества $W = (X \cup \cup Y, R)$, где R определяется следующим образом:

$$x < y(R), \quad \text{если} \begin{cases} x, y \in X \wedge x < y(R_x), \\ \text{или} \quad x \in X, \quad y \in Y, \\ \text{или} \quad x, y \in Y \wedge x < y(R_Y). \end{cases}$$

Таким образом, вполне упорядоченное множество W получается при «подклеивании» вполне упорядоченного множества W_β к W_α. При этом порядок «прибавления слагаемых» является существенным: так, например, $\omega = 1 + \omega \neq \omega + 1$.

Определение 5. Порядковое число α называется *предельным*, если множество $X(\alpha)$ всех порядковых чисел, меньших, чем α, не имеет наибольшего элемента.

Так как $X(0) = \varnothing$, то, очевидно, 0 — наименьшее предельное число. Следующим предельным числом является ω ($X(\omega)$ состоит из всех конечных порядковых чисел), затем $\omega + \omega = 2\omega$ и т. д.

Теорема 9. *Для любого порядкового числа* α *существует в точности одно предельное число* $\lambda(\alpha)$ *и в точности одно конечное порядковое число* $k(\alpha)$, *причем* $\alpha = \lambda(\alpha) + k(\alpha)$.

Это представление мы использовали в § 2.3.

Теорема 10. *Среди всех порядковых чисел, не принадлежащих заданному множеству порядковых чисел, существует наименьшее.*

§ П.3. О применении принципа индукции

Мы использовали принцип определения с помощью трансфинитной индукции для того, чтобы выделять определенные подмножества всех позиций в исследованных играх. При этом мы исходили — как это делалось в связи с порядком графа (P, γ) — из представления о том, что каждому порядковому числу α ставилось в соответствие подмножество $Q_\alpha (\subset P)$. В качестве прообразов конструируемого отображения $\alpha \mapsto Q_\alpha$ допускаются все порядковые числа, а из-за этого мы прежде всего сталкиваемся с трудностью при попытке применения теоремы 4: область определения X конструируемого отображения не является множеством, а (X, R) не является вполне упорядоченным множеством.

Эту трудность, однако, легко обойти, если сразу выбрать достаточно большое (зависящее от P) порядковое число $\alpha(P)$, а затем рассматривать только множество $X(\alpha(P))$ всех порядковых чисел, меньших, чем $\alpha(P)$. Мы можем поступить, например, следующим образом.

Пусть $M = M(P)$ — произвольное множество мощности, большей, чем мощность 2^P. Его можно вполне упорядочить (теорема 5). Выберем $\alpha(P)$ как порядковое число, представляющее порядковый тип вполне упорядоченного множества (M, R). Далее, (M, R) и $(X(\alpha(P)), <)$ являются вполне упорядоченными множествами одного типа (теорема 8), а следовательно, M и $X(\alpha(P))$ имеют одинаковую мощность.

Если теперь ограничить наше индуктивное определение на $\alpha \in X(\alpha(P))$, то определенным различным прообразам α и β следует поставить в соответствие одинаковые образы Q_α и Q_β (в противном случае мощность множества 2^P была бы по меньшей мере равна мощности множества M). Тогда для нашего конкретного отображения T отсюда следует существование такого порядкового числа $\alpha_0 \in X(\alpha(P))$, что

$$Q_{\alpha_0} = Q_\alpha \quad \forall \alpha \in X(\alpha(P)),\ \alpha > \alpha_0.$$

Если мы, наконец, положим формально $Q_\beta = Q_{\alpha_0}$ для любого порядкового числа β, не лежащего в $X(\alpha(P))$, то получим рассмотренное нами множество Q_α, соответствующее порядковому числу α. Фактически мы всегда интересовались только множествами Q_α с $\alpha \leqq \alpha_0$.

Список литературы [1]

Для того чтобы указать те области теории игр, которым преимущественно посвящены соответствующие работы, использованы следующие сокращения: КН — конкретные игры Ним, ТН — теория игр Ним, НИ — игры с неполной информацией, ПИ — игры с полной информацией, ТИ — теория игр в целом.

Баутон (Bouton C. L.)
[1] Nim, a game with a complete mathematical theory. — Ann. Math., Ser. 2, 1902, vol. 3, no. 1, p. 35—39 (КН).

Баше де Мезирак (Bachet de Méziriac C. G.)
[1] Recueil de problèmes et délectables qui se font par les nombres.— Lyon: 1612; второе издание: Problèmes plaisant et délectables, qui se font par les nombres. — Paris: Gautier, 1784; третье издание: 1874.

Бенсон (Benson D. C.)
[1] A generalization of the game of Nim. — Amer. Math. Monthly, 1956, vol. 63, no. 7, p. 533 (ТН).

Берж (Berge C.)
[1] Théorie générale des jeux à *n* personnes. — Paris: Gauthier-Villars, 1957. [Имеется перевод: Общая теория игр нескольких лиц. — М.: Физматгиз, 1961.] (ТИ, ПИ, НИ, ТН).
[2] La fonction de Grundy d'un graphe infini. — C. r. Acad. sci. Paris, 1956, t. 242, no. 11, p. 1404—1407 (ТН).
[3] Topological games with perfect information. — In: Contributions to the theory of games. Vol. 3 (Ann. Math. Study, no. 39). — Princeton: Princeton Univ. Press, 1957, p. 165—178 (ПИ).
[4] Théorie des graphes et ses applications. — Paris: Dunod, 1958. [Имеется перевод: Теория графов и ее применения. — М.: ИЛ, 1962.] (НИ, ПИ, ТН).

Берж, Шютценберже (Berge C., Schützenberger M. P.)
[1] Jeux de Nim et solutions. — C. r. Acad. sci. Paris, 1956, t. 242, no. 13, p. 1672—1674 (ТН).

Бургер (Burger E.)
[1] Einführung in die Theorie der Spiele. Mit Anwendungsbeispielen, insbesondere aus Wirtschaftlehre und Sociologie. — Berlin: de Gruyter, 1959 (ТИ).

Буцан Г. П., Варвак Л. П.
[1] К вопросу об играх на графе. — В кн.: Алгебра и математическая логика. — Киев: Наукова думка, 1966, с. 122—138 (ТН).

Витгофф (Wythoff W. A.)
[1] A modification of the game of Nim. — Nieuw archief voor wiskunde, Reeks 2, 1907, d. 7, blz. 199—202 (КН).

Воробьев Н. Н.
[1] Математическая теория игр. — Л.: Знание, 1963 (ТИ).

[1]) Звездочкой отмечены работы, добавленные при переводе. — *Прим. ред.*

[2] Расчлененные стратегии в позиционных играх. — В кн.: Проблемы кибернетики. Вып. 7. — М.: Наука, 1962, с. 5—20 (НИ).
[3] Контролируемые процессы и теория игр. — Вестник ЛГУ, 1955, № 11, Сер. мат., мех., астрон., вып. 4, с. 49.
[4] Редуцированные стратегии в позиционных играх. — В кн.: Позиционные игры. — М.: Наука, 1967, с. 94—113 (НИ).
[5] Развитие теории игр. — В кн.: фон Нейман Д., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение: Пер. с англ. — М.: Наука, 1970, с. 631—702 (ТИ)

Воробьев Н. Н., Малинников В. В., Соболев А. И.
[1] О задачах линейного программирования на ориентированных графах. — Экон. и матем. методы, 1968, т. 4, № 4, с. 622—628.

Гай, Смит (Guy R. K., Smith C. A. B.)
[1] The G-values of various games. — Proc. Cambridge Philos. Soc., 1956, vol. 52, no. 3, p. 514—526 (КН).

Гейл, Стюарт (Gale D., Stewart F. M.)
[1] Infinite games with perfect information. — In: Contributions to the theory of games. Vol. 2 (Ann. Math. Study, no. 28). — Princeton: Princeton Univ. Press, 1953, p. 245—266 (РИ).

Гранди (Grundy P. M.)
[1] Mathematics and games. — Eureka, 1939, no. 2, p. 6—8 (ТН).

Гранди, Смит (Grundy P. M., Smith C. A. B.)
[1] Disjunctive games with the last player losing. — Proc. Cambridge Philos. Soc., 1956, vol. 52, no. 3, p. 527—533 (КН, ПИ).

Гутьеррес (Gutiérrez C. S.)
[1] Games of Nim and graphs. — Estadist. españ, 1964, no. 25, p. 27—35 (ТН).
[2] Grafos y juegos de N personas. — Trab. estadist, 1964, t. 15, cuad 2, p. 169—182 (ТН, ПИ).

Денофский (Denofsky M. E.)
[1] Games and graphs. — Techn. Eng. News, 1966, vol. 48, no. 3, p. 36—39 (ПИ).

Доморяд А. П.
[1] Математические игры и развлечения. — М.: Физматгиз, 1961 (КН).

Кальмар (Kálmar L.)
[1] Zur Theorie der abstrakten Spiele. — Acta sci. math. Szeged, 1928/29, t. 4, old 65—85 (ПИ).

Кёниг (König D.)
[1] Über eine Schlußweise aus dem Endlichen ins Unendliche. — Acta sci. math. Szeged, 1927, t. 3, old 121—130 (ПИ).

Клауа (Klaua D.)
[1] Kardinal- und Ordinalzahlen. — Berlin: Akademie-Verlag, 1974.

Коннел (Connell I. G. A.)
[1] A generalization of Wythoff's game. — Canad. Math. Bull., 1959, vol. 2, no. 3, p. 181—190 (КН).

Константинеску, Лулеа, Никулеску (Constantinescu P., Lulea C., Niculescu S.)
[1] Algorithm for determining the nucleus of a graph associated with the game of Nim. — Stud. cerc. mat. Acad. R. P. R., 1964, t. 15, no. 1, p. 77—81 (на румын. языке) (КН).

Куммер (Kummer B.)
[1] Diskrete Positionsspiele und eine Verallgemeinerung des v. Neumann — Morgensternschen Lösungsbegriffs für klassische Kooperativspiele/Dissertation (A). — Berlin: Humboldt-Universität, 1975 (ТН, ПИ).
[2] Antagonistische Terminalspiele. — Ekonomicko-matematicky Obzor, Roč. 12 (1976), č. 2, 117—126 (ПИ).

Кун (Kuhn H. W.)
[1] Extensive games and the problem of information. — In: Contributions to the theory of games, Vol. 2 (Ann. Math. Study, no. 28).— Princeton: Princeton Univ. Press, 1953, p. 193—216 (НИ).
Ласкер (Lasker E.)
[1] Brettspiele der Völker. — Berlin: Aug. Scherl GmbH, 1930.
Мур (Moore E. H.)
[1] A generalization of the game called Nim. — Ann. Math. Ser. 2, 1910, vol. 11, no. 1, p. 93—94 (КН).
Мыцельский, Штейнгауз (Mycielsky J., Steinhaus H.)
[1]* A matematical axiom contradicting the axiom of choice. — Recent advances in game theory. — In: Papers delivered at a Princeton university conference. Oct. 4—6 1961, Princeton, Econometric res. progr., 1962, p. 171—174.
Натансон И. П.
[1]* Теория функций вещественной переменной. — М.: Наука, 1974.
фон Нейман, Моргенштерн (von Neumann J., Morgenstern O.)
[1] Theory of games and economic behaviour. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1944. [Имеется перевод: Теория игр и экономическое поведение. — М.: Наука, 1970.] (ТИ).
Ножичка, Гуддат, Холлатц (Nožička F., Guddat J., Hollatz H.)
[1] Theorie der linearen Optimierung. — Berlin: Akademie-Verlag, 1972.
Оуэн (Owen G.)
[1] Game theory. — Philadelphia e. a.: Saunders, 1968. [Имеется перевод: Теория игр. — М.: Мир, 1971.] (ТИ).
Пилер (Piehler J.)
[1] Einführung in die dynamishe Optimierung. — 2 Aufl. — Leipzig: B. G. Teubner, 1966.
Сколе (Skole J.)
[1] Eigenschaften von Gleichgewichtssituationen diskreter Positionsspiele/Diplomarbeit. — Berlin: Humboldt-Universität, 1975 (ПИ).
Смит (Smith C. A. B.)
[1] Graphs and composite games. — J. Combinat. Theory, 1966, vol. 1, no. 1, p. 51—81 (ТН).
Соболев А. И.
[1]* Кооперативные игры. — В кн.: Проблемы кибернетики. Вып. 39.— М.: Наука, 1982.
Томсен (Thomsen P.)
[1] The mathematical treatment of a well known two-person game. — Mat. tidsskr. Ser. A, København, 1952, h. 3, s. 63—72 (КН).
Холладей (Holladay J. C.)
[1] Cartesian products of termination games. — In: Contributions to the theory of games. Vol. 3 (Ann. Math. Study, no. 39). — Princeton: Princeton Univ. Press, 1957, p. 189—200 (ТН).
Цермело (Zermelo E.)
[1] Über eine Anwendung der Mengelehre auf die Theorie des Schachspiels. — In: Proceedings of the Fifth International congress of mathematicians, Cambridge, 1912. Vol. 2. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1913, p. 501—504. [Имеется перевод: О применении теории множеств к теории шахматной игры. — В кн.: Матричные игры. — М.: Физматгиз, 1961, с. 167—172.] (ПИ).
Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г.
[1]* Линейное программирование. Теория, методы и приложения. — М.: Наука, 1969.

Указатель примеров

Предметный указатель

Оглавление